Joseph Mazur

Achille e la tartaruga

Il paradosso del moto
da Zenone a Einstein

ilSaggiatore

Achille e la tartaruga. Il paradosso del moto da Zenone a Einstein

Joseph, Mazur

ISBN: 9788865760482

La Cultura 664

www.saggiatore.it

Titolo originale: Zeno's Paradox

Joseph Mazur

Achille e la tartaruga

Il paradosso del moto da Zenone a Einstein

Traduzione di Claudio Piga

ilSaggiatore

Achille e la tartaruga

a Jennifer,
in memoria di sua madre,
la mia cara e adorata suocera Anne Joffe,
perspicace nel porre le domande,
sottile nel porgere ascolto,
assistente amorevole

PRIMA PARTE

Un turbine di assurdità

1. Preambolo ai paradossi del moto

La prima persona che mi parlò dei paradossi del tempo fu mio padre. Non aveva mai sentito parlare dei paradossi di Zenone, quei sottili ragionamenti sulla natura del movimento che contraddicono il senso comune e che sono stati fraintesi da due millenni buoni a questa parte, ma era un gentiluomo portato per la filosofia, con una sua saggezza istintiva riguardo alle cose di questo mondo e al modo in cui vanno. Mio fratello aveva appena ricevuto come regalo di compleanno una bicicletta fiammante, una bicicletta della migliore marca (una Schwinn!): aveva i parafanghi cromati, un tachimetro e un campanello elettrico. Accidenti, era una meraviglia. Il gentiluomo filosofo sapeva bene quel che andavo rimuginando. Per lenire la mia invidia, mi prese da parte e mi disse che avevo la metà degli anni di mio fratello, ma che dopo otto anni avrei avuto i tre quarti della sua età e che da quel momento in poi la differenza sarebbe stata quasi impercettibile. Naturalmente, non avevo alcuna idea di che cosa significasse l'espressione «tre quarti», figuriamoci se sapevo che cosa volesse dire avere i tre quarti dell'età di qualcuno. Quando gli chiesi a quale età avrei potuto raggiungere mio fratello completamente, mi disse sorridendo che questo non sarebbe mai avvenuto, ma che la differenza si sarebbe ridotta sempre più. Anni dopo pensai di aver capito: ma adesso che mi trovo a colmare rapidamente la distanza che mi separa da mio fratello, ora che sono arrivato ai sedici diciassettesimi della sua età, soltanto adesso comincio a capire. Fra parentesi, la bicicletta di mio fratello è stata rubata l'anno successivo, a pochi giorni dal suo nuovo compleanno.

Più di 2000 anni prima che mio padre placasse la mia invidia per la bicicletta con il suo esperimento mentale, Zenone aveva inventato paradossi analoghi. Zenone dimostrava con logica incontrovertibile che niente si muove, contrariamente a quanto suggerisce la nostra esperienza quotidiana.

Ecco i quattro paradossi di Zenone, come sono riportati nella Fisica di Aristotele:[1]

Dicotomia – Un oggetto in movimento non raggiungerà mai nessun punto assegnato: infatti, per quanto vicino possa essere al punto, deve prima compiere metà del percorso, quindi metà del percorso che è avanzato, e così via, in una successione infinita. Perciò l'oggetto non potrà mai raggiungere il termine di qualsiasi distanza assegnata.

Achille – Il più veloce dei corridori non potrà mai raggiungere il più lento, se al più lento viene concesso un vantaggio iniziale, quale che esso sia: infatti, nel momento in cui il corridore più veloce avrà raggiunto il punto di partenza del più lento, questi si sarà allontanato dal suo punto di partenza; nel momento in cui il più veloce avrà raggiunto un nuovo punto toccato in seguito dal più lento, questi ancora una volta se ne sarà allontanato, e così via...

Freccia in volo – È impossibile che un oggetto si muova in un assegnato periodo di tempo, dal momento che non è possibile che un oggetto si trovi in movimento in un preciso istante, essendo l'istante indivisibile.

Stadio – Dato un certo periodo di tempo, la sua metà è uguale al tutto: infatti, due movimenti uguali devono compiersi in tempi uguali, tuttavia il tempo impiegato per superare lo stesso numero di oggetti uguali varia, secondo che gli oggetti siano in movimento o fermi. La fallacia del ragionamento è individuabile nell'assunto che un corpo in movimento passi davanti a un insieme di oggetti con eguale velocità, indipendentemente dal fatto che tale insieme sia in movimento oppure fermo.

Il paradosso della freccia in volo porta alla conclusione che il movimento è impossibile. Zenone sottopone alla nostra attenzione una freccia in volo e la considera come congelata in un preciso punto della scala temporale. Sostiene che la freccia in quel preciso istante dev'essere ferma e che se è ferma in quell'istante è ferma in un qualsiasi istante, in tutti gli istanti. Dunque la freccia non si muove affatto. Questo paradosso da solo può essere sconcertante, ma i quattro paradossi insieme mettono in gioco un turbine di assurdità, tale da far vacillare i nostri modelli mentali, quelli con cui ci rappresentiamo la realtà.

I paradossi di Zenone sollevano una domanda fondamentale sull'Universo: il tempo e lo spazio sono continui come una linea ininterrotta, oppure risultano da un insieme di unità discrete, come un filo di perle? È un problema ancora irrisolto perfino per i fisici odierni, che si ritiene siano più che mai vicini alla formulazione di una teoria globale dell'Universo, la cosiddetta Teoria del tutto.

Gli argomenti di Zenone sembrano assurdi. Sappiamo che la freccia fende l'aria, ma ci troviamo in difficoltà se dobbiamo spiegare perché, o come facciamo a saperlo. Si potrebbe affermare che è assurdo pensare di poter fissare un punto sulla scala temporale e che non ha senso dire che una freccia appare ferma in un qualsiasi punto temporale. In matematica il tempo è una variabile che può essere fissata a piacimento, assegnandole un qualche numero. Disponiamo di formule che ci dicono dove si trova la freccia in un qualsiasi istante t: è sufficiente porre t uguale a un preciso valore esprimente il tempo per determinare la corrispondente posizione. Questo significa che i nostri modelli matematici riguardo al moto, allo spazio e al tempo sono costruzioni intellettuali che abbiamo messo a punto soltanto per facilitare i calcoli, non idonee tuttavia a conseguire il fine più ambizioso di rappresentare la struttura della realtà.

Arrivati, grazie alla matematica, a capire le sottigliezze del concetto di movimento, abbiamo potuto far luce sui paradossi di Zenone. Ma potremo risolvere in via definitiva i suoi rompicapo, formulati all'alba del pensiero scientifico, soltanto quando avremo risolto i misteri più reconditi del tempo e dello spazio. Zenone era in anticipo sul suo tempo.

La storia non è stata sempre generosa con le invenzioni di Zenone. Talvolta, nel corso degli ultimi 2000 anni, i suoi paradossi sono stati considerati niente di più che sofismi logici, tali che non valeva la pena continuare a discuterne. Altre volte sono stati considerati come un intralcio nell'indagine matematica sull'infinito e sul continuo: gli storici della scienza affermano che quei paradossi hanno contribuito a far sì che i greci antichi abbandonassero questo genere di indagini.

Quasi tutto ciò che sappiamo sulla vita di Zenone è il risultato di mera speculazione, basata su frammenti del suo pensiero e fonti storiche datate mille anni dopo la sua morte. Sappiamo che scrisse un meraviglioso libro di filosofia, utilizzato come libro di testo nell'Accademia platonica, ma non ne è sopravvissuto nessun frammento, neanche brevissimo. Proclo, filosofo e matematico del V secolo d.C., la nostra fonte principale d'informazioni riguardo alla storia delle origini della geometria greca, ci informa che Zenone scrisse un libro contenente quaranta paradossi, ma che fu rubato prima della pubblicazione. I quattro paradossi dei quali siamo a conoscenza ci sono pervenuti grazie alla sola testimonianza di Aristotele. Da allora su questi paradossi sono state scritte decine di opere di grande importanza, per opera di studiosi illustri, da Platone a Bertrand Russell. Questa letteratura contiene una serie di nessi che creano magnifici ponti nella storia.

L'assenza di scritti di Zenone fa nascere il sospetto sull'eventualità che egli stesso sia mai esistito o sia stato invece solo un personaggio del Parmenide di Platone. Nonostante la mancanza di testimonianze dirette, ad attestare la profondità delle sue idee filosofiche avanza una gran quantità di materiali, dalla quale è possibile raccogliere indizi sufficienti per costruire una storia coerente. Platone e Diogene Laerzio forniscono gli angoli del puzzle concernente la vita di Zenone, Aristotele e Proclo ci danno la cornice della sua filosofia: il resto lo mettiamo noi, con le nostre ipotesi.

Il tema del movimento cessò di essere oggetto di discussione dopo la morte di Archimede nel 212 a.C. Rimarrà sommerso per circa 1400 anni, allorché Gerardus Bruxellensis (Gerardo di Bruxelles) rivisitò le opere matematiche di Euclide e Archimede e si avvicinò parecchio alla definizione della velocità come rapporto tra spazio e tempo. Circa cent'anni dopo, quattro matematici del Merton College di Oxford, in uno scambio di opinioni riguardo alla meccanica del moto, riuscirono a elaborare le prime formule che mettevano in relazione, per gli oggetti in caduta libera, la velocità e lo spazio con il tempo. Si è detto che la stessa matematica utilizzata dai matematici del Merton College risolverebbe il paradosso di Achille. Mostrerò che, se le cose sembrano essere così a prima vista, tuttavia quella matematica – cioè l'algebra elementare – non ci aiuta ad affrontare il problema fenomenologico sul quale il paradosso richiama la nostra attenzione.

Trecento anni dopo i matematici del Merton College, Galileo cominciò a fare esperimenti su oggetti fisici dei quali misurava il moto. Impresse così, con l'introduzione del metodo sperimentale tuttora in auge nella pratica scientifica attuale, una svolta alla ricerca scientifica. Grazie a Galileo si affermò una stretta connessione tra matematica e mondo fisico. Newton, Leibniz e altri matematici estesero ulteriormente questo approccio e, per modellizzare il moto, svilupparono quella branca della matematica che conosciamo con il nome di calcolo infinitesimale (o differenziale).

Newton ebbe l'intuizione che l'accelerazione – cioè la variazione di velocità rapportata al tempo, o tasso di variazione della velocità – fosse completamente determinata da due grandezze che apparentemente non presentano alcun nesso con il movimento, la forza e la massa. Sembrò a molti che, finalmente, le leggi del moto fossero state compiutamente spiegate. Era il trionfo della matematica nella spiegazione del mondo fisico. Si ebbe l'impressione che il calcolo infinitesimale potesse spiegare il paradosso della dicotomia. Ma, ancora una volta, la matematica è semplicemente uno strumento: la realtà soggiacente, quella che il paradosso mette in discussione, non viene appunto discussa.

Prima del XVIII secolo il tempo è stato misurato approssimativamente. Galileo lo misurava rapportandolo al battito del polso. Oggi i nostri orologi atomici arrivano a misurare intervalli di tempo molto piccoli, fino a un milionesimo di secondo. (Anche se abbiamo una parola a disposizione per esprimere un miliardesimo di secondo, il nanosecondo, non disponiamo ancora, tuttavia, di un sistema idoneo a una sua misura accurata.) Ma, indipendentemente dalla precisione raggiunta dai nostri orologi, il punto è che essi misurano sempre qualcosa che è discreto, cioè non continuo: l'intervallo scandito da un segnale costante e ripetitivo, la durata tra due eventi. Questo è il cuore del problema: misuriamo il tempo come una durata, ma pensiamo al movimento come a qualcosa di continuo. La migliore definizione di movimento disponibile si presenta come un garbuglio intricato a cavallo tra la percezione discreta e la concezione continua del tempo e dello spazio. Nonostante i contributi di Aristotele, Galileo e Newton, e quelli di molti altri, per più di duemila anni nessuno è stato in grado di offrire spunti di riflessione sulla natura profonda del movimento migliori di quelli di Zenone.

Con il XX secolo si sono affacciate alla ribalta scientifica la teoria della relatività e la meccanica quantistica. Spazio e tempo non sono stati più pensati come aspetti disgiunti della realtà, ma sono stati connessi in un unico continuo a quattro dimensioni. La dilatazione del tempo, la variabilità della massa e la teoria della relatività ristretta suggeriscono che, di fatto, il movimento sia illusorio. Il movimento comporta una variazione della massa: o forse dobbiamo invertire questa affermazione? La teoria quantistica suggerisce che alcuni movimenti non siano continui. La posizione degli elettroni all'interno di un atomo non può essere una qualsiasi. Il moto degli elettroni intorno al nucleo dell'atomo è possibile soltanto in determinati orbitali, caratterizzati da livelli energetici discreti. Tuttavia ci riesce ancora difficile immaginare gli elettroni mentre compiono un salto discreto, contrapponendosi alla nozione intuitiva della continuità del movimento. A questo punto non si può fare a meno di pensare a quanto Zenone avrebbe ragione di compiacersi per il ritorno dei suoi paradossi: non è più possibile considerarli superati, come se veramente semplici argomenti di calcolo infinitesimale avessero fornito una risposta esauriente.

Una cosa è certa: tutto nell'Universo, ogni atomo, ogni molecola, è animato da qualche forma di movimento: che si tratti di un semplice spostamento di un oggetto da un posto all'altro, o di un bombardamento disordinato di molecole, o delle vibrazioni straordinariamente veloci, complesse ma ordinate, associate a un trasferimento di energia. E la nostra comprensione di quel movimento continua a essere fondamentalmente paradossale. Uno dei capitoli più interessanti della storia della nostra civiltà è il racconto di come abbiamo affrontato il mistero del movimento, unito al resoconto dell'insieme dei progressi tecnologici e scientifici che hanno accompagnato tale ricerca.

2. La visita di Zenone ad Atene

Atena era la dea glaucopide della guerra, della fertilità, dell'arte e della saggezza. L'anniversario della sua nascita era uno dei rari giorni in cui alle donne e ai liberti era concesso oziare nei luoghi pubblici. Immaginate di trovarvi nella grande agorà di Atene, luogo di mercato e di incontro per gli ateniesi, in vista dell'Acropoli, verso sudest. Guardando in direzione nordovest potreste vedere la Via Panatenaica, polverosa e parzialmente ombreggiata da pioppi e robusti alberi di carrubo. Vedreste anche i preparativi per la celebrazione delle Grandi Panatenee. Vedreste gli atleti unti di olio d'oliva in vista della competizione per aggiudicarsi il premio delle gare di corsa, di pugilato, di salto in lungo, di lancio del giavellotto e delle corse dei carri; vedreste i musici che faranno a gara per dimostrare la propria abilità nel canto o nell'esecuzione musicale su cetra o flauto; vedreste bardi ciechi che recitano i versi dei poemi omerici. Siamo nel 450 a.C., quattro anni dopo la celebrazione dell'ultima Grande Panatenea, appena un anno dopo la firma di un armistizio della durata di cinque anni tra Atene e l'altra grande potenza, la città-stato di Sparta.

A nordovest dell'agorà si trovava il Ceramico, il quartiere dei vasai, diviso in due dalle mura di Atene: la parte interna costituiva una grande e bella piazza pubblica, mentre la parte esterna ospitava il cimitero dei morti in guerra. Qui si conservavano le lastre di marmo pentelico, in vista della costruzione del Theseion, il tempio in onore di Efesto, dio del fuoco, abile fabbro con un corpo massiccio e gambe sottili, «il duro collo ed il peloso petto».[1] Il Ceramico era un quartiere tranquillo, lontano dai richiami assordanti dei mercanti: macellai, fornai, apicoltori, mercanti di olio e di vino, fabbri, assiepati lungo la via affollata e bianca di calcare, la Via Panatenaica lungo la quale si sarebbe svolta la processione, fin su in cima alla collina dell'Acropoli. Dalle fessure del calcare spuntava il timo selvatico accanto ai cesti dei venditori di frutta. Così ne scrisse Omero:[2]

> Né il frutto qui, regni la state, o il verno,
> pêre, o non esce fuor: quando sì dolce
> d'ogni stagione un zeffiretto spira,
> che mentre spunta l'un, l'altro matura.
> Sovra la pera giovane, e su l'uva
> l'uva, e la pera invecchia, e i pomi e i fichi
> presso ai fichi e ai pomi.

Secondo Platone, Antifonte sofista[3] aveva sentito la storia della visita di Zenone ad Atene dal suo amico Pitodoro così tante volte che poteva ripeterla a memoria. All'incontro era presente – seduto su una pietra – Parmenide, il fondatore della celebre scuola filosofica eleatica, allora sulla sessantina, con i capelli bianchissimi e un portamento distinto. Accanto a Parmenide aveva preso posto Pitodoro, che pur giovane aveva già la barba del filosofo, dall'aspetto particolarmente sveglio.[4] Vicino a lui si trovava Aristotele, quell'Aristotele che in seguito sarebbe stato uno dei trenta tiranni, un uomo abbronzato immerso nei suoi pensieri. C'era anche Socrate, allora giovane, meno che ventenne. Nelle vicinanze un asino si ostinava a lamentarsi per il carico di orzo che gravava sul suo dorso.

Zenone di Elea,[5] un intellettuale rivoluzionario, «alto e attraente», lesse in quell'occasione alcuni brani del suo famoso libro di filosofia. Era venuto ad Atene da Crotone, nella Magna Grecia, insieme al suo maestro e amante Parmenide, per assistere alla celebrazione delle Grandi Panatenee e per far visita a Pitodoro che aveva casa proprio appena fuori delle mura della città, nel Ceramico. I ragionamenti di Zenone erano terribilmente intricati: sembravano fare affidamento su alcuni stratagemmi linguistici con lo scopo di arrivare a suggerire, con risultati disorientanti, che in questo mondo esiste una sola cosa, quella che lui chiamava l'Essere, e che tutto il resto è mera apparenza. Argomentava che se una cosa può essere divisa, possiamo allora dividere anche le sue parti e che tale processo di divisione può continuare all'infinito. Dal che egli concludeva che il cambiamento, e quindi il moto, non è possibile. Dopo che Zenone ebbe finito di leggere, i suoi ascoltatori erano frastornati. Anche Socrate era confuso, perciò, con tono di sfida, rivolse a Zenone queste parole:[6]

> «Che vuoi dire con ciò, Zenone? Che, se molti sono gli enti, ne segue di necessità che essi siano e simili e dissimili e che questo, appunto, è impossibile? Perché né i dissimili possono essere simili, né i simili possono essere dissimili? Non è questo forse ciò che intendi dire?»
> «Proprio questo» replicò Zenone.

Anche il resto degli ascoltatori era confuso, come Socrate, il quale disse: «I vostri discorsi [di Zenone e Parmenide] hanno l'aria di voler passare al di sopra delle teste di noi profani». Zenone suggeriva che vi fosse una connessione tra il problema della pluralità, quello dell'essere, quello della continuità e quello del movimento.[7] Ma ecco qualcosa che abbiamo già sentito:

> Dio disse: «Vi sia una grande volta! Divida la massa delle acque». E così avvenne. Dio fece una grande volta e separò le acque di sotto dalle acque di sopra. Dio chiamò la grande volta Cielo.[8]

Nel libro della Genesi, dalle acque vennero due cose distinte: il cielo e la terra. La Creazione dunque è un processo di divisione che definisce degli opposti: luce e tenebre, giorno e notte, estate e inverno, terra e mare, carne e pesce, pari e dispari, bene e male.

Le affermazioni di Zenone non sono campate per aria. Se esistono due cose, deve anche esistere una terza cosa che le separi, altrimenti non ci sarebbero due cose, ma una sola. Così, se esistono tre cose, devono esistere una quarta e una quinta cosa che le separino. Per poter fare una distinzione tra A e B, ci dev'essere un separatore C; e per distinguere tra A e C deve esserci un altro separatore D; e così via. Si dimostra così che in questo mondo deve esserci soltanto una cosa, oppure deve esserci un insieme infinito di cose. Socrate continuò:

> «È questo forse a cui mirano le tue argomentazioni: a sostenere unicamente, contro il modo comune di esprimersi, l'inesistenza dei molti? Dici così o io non ho capito bene?»
> «No, no» rispose Zenone. «Anzi, hai capito benissimo a che cosa mira tutto il mio scritto.»

Zenone proseguì sostenendo che non c'è cosa alla quale si possa attribuire un cambiamento, dal momento che una variazione richiederebbe che l'essere fosse soggetto a un divenire e che avesse un termine. «Perciò» affermava Parmenide «ciò che non è, non possedendo la proprietà di essere in nessun senso, non può cessare di essere, né cominciare a essere». Sia Parmenide sia Zenone pensavano che qualcosa che fosse soggetta a un processo di variazione dovesse svolgere quel processo nel tempo. Perciò il cambiamento è equivalente al moto; come una freccia che non può mai lasciare l'arco, il cambiamento è impossibile.

Gli argomenti di Zenone riguardo all'impossibilità del moto si possono anche applicare alla maturazione di una pera. Il neurologo Oliver Sacks una volta scrisse: «Avevo l'abitudine di andare ogni mattina nel giardino: osservavo l'ibisco e trovavo che era cresciuto un po' e anche le rose si erano intrecciate un po' di più nella spalliera. Ma, per quanto assidua e paziente fosse la mia osservazione, non sono mai riuscito a cogliere un loro movimento».[9] Tutti noi abbiamo visto un giardino in primavera, ma siamo mai riusciti ad avere percezione della crescita dei fiori? Come non vediamo la crescita del fiore dell'ibisco, così non riusciamo nemmeno a cogliere la maturazione di una pera, e se anche essa cambia nel colore, nel gusto, nell'aspetto della buccia e persino nella forma, rimane sempre una pera. Com'è che la pera passa dallo stato di pera acerba a quello di pera matura, se in ogni singolo istante in cui la osserviamo si trova in uno stato fisso, intermedio fra due estremi? I paradossi di Zenone riguardano non soltanto il moto ma, più in generale, le variazioni di qualità e di quantità.

Zenone era cittadino di Elea (oggi Velia) che, secondo la testimonianza di Diogene Laerzio, era una colonia non particolarmente florida della Magna Grecia, fondata nel 545 a.C. dai focesi, al tempo in cui le colonie greche si diffondevano sulle sponde del Mediterraneo un po' dappertutto, quasi come legni trascinati dalla corrente. Sempre secondo Diogene Laerzio, Elea non presentava alcuna caratteristica degna di nota, salvo questa: che conosceva il modo di infondere la virtù nei cittadini. Molto prima che Alessandro Magno estendesse il suo impero fino all'India, i greci avevano stabilito colonie nell'Italia meridionale, nella penisola iberica, in Corsica, nel Nord Africa, nel Ponto Eusino (cioè nel Mar Nero), oltre che sull'antistante costa ionica, nell'Asia minore. In pochi, dinamici secoli, un numero tutto sommato esiguo di greci aveva sviluppato una cultura straordinaria, un intreccio di scienza politica, arte e filosofia.[10] Aveva creato un sistema di governo delle città per cui gli affari dello Stato non erano di pertinenza esclusiva e privata del re o del governatore, ma investivano la collettività dei cittadini:[11] era l'alba della democrazia. La musica, la politica e l'arte convergevano nell'ispirazione di tragediografi come Eschilo, Sofocle ed Euripide o in quella di commediografi come Aristofane, che scrissero per un pubblico abituato ad accorrere numeroso al teatro di Dioniso, posto sul fianco sudest dell'Acropoli, con una capacità di 17 000 spettatori. Furono i greci a scoprire i misteri della natura dei numeri, ponendo le basi di ciò che, oggi, chiamiamo «matematica».

Pitagora di Samo (560-480 a.C.) fu probabilmente il più famoso e il più carismatico dei matematici del suo tempo. Sappiamo molto poco della sua vita, se non che viaggiò parecchio nel mondo ellenico e che si stabilì a Crotone, in Magna Grecia, nel versante orientale dell'attuale Calabria. La sua dottrina matematica si era sviluppata su un sostrato mistico e i suoi discepoli erano di fatto un gruppo di iniziati, stretti fra loro da un vincolo di fratellanza. La setta pitagorica durò per circa un secolo dopo la morte del maestro. I pitagorici ebbero una grande influenza su molti pensatori, compreso Zenone. In particolare, Zenone non fu insensibile alla nozione che le rette costituissero un allineamento di punti, come una serie di minuscole perline infilate in una collana. Ma Zenone e Parmenide rifiutarono questa nozione pitagorica, argomentando che se una retta consistesse in un numero finito di punti, allora anche il tempo dovrebbe consistere in un numero finito di istanti, tanto che i giorni dovrebbero trascorrere non come un flusso continuo e omogeneo, bensì per incrementi successivi e discreti, uno dopo l'altro, come i granelli di sabbia che cadono dal bulbo superiore a quello inferiore di una clessidra. Erano anni in cui si formava e cresceva una classe di uomini istruiti, consapevoli dell'importanza delle scoperte dei pitagorici e della loro ricaduta non solo in ambito geometrico, ma anche scientifico.

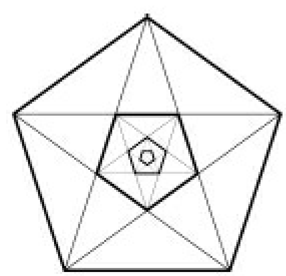
La setta pitagorica scoprì la relazione esistente tra i lati di un triangolo rettangolo: una relazione (il cosiddetto teorema di Pitagora) che avrebbe determinato la convergenza tra la teoria dei numeri e la geometria ma che, nello stesso tempo, avrebbe dato luogo a una delle prime incongruità della modellazione matematica del mondo fisico. Il teorema di Pitagora stabilisce che la somma dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al quadrato costruito sulla sua ipotenusa. Questo teorema, bellissimo nella sua essenzialità, avrebbe creato problemi filosofici enormi alla setta pitagorica, secondo la quale i numeri rappresentano tutte le cose di questo mondo. Secondo la leggenda, i pitagorici, dopo questa scoperta, avrebbero sacrificato un bue (anche se è molto improbabile che abbiano veramente fatto un sacrificio animale, considerato che erano strettamente vegetariani e credevano nella trasmigrazione delle anime).

I pitagorici ritenevano che qualunque cosa nel mondo potesse essere rappresentata da un numero finito di disposizioni di numeri interi. Il numero 2 rappresentava l'opinione, il numero 3 indicava l'armonia, il 4 stava per la giustizia. I numeri dispari erano considerati maschili, i numeri pari femminili. Il numero 5 rappresentava il matrimonio, perché era la somma del primo numero pari e del primo numero dispari.[12] Il numero 10 era considerato sacro perché somma dei primi quattro numeri, generatori di tutte le dimensioni: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Infatti, il numero 1 corrisponde a un punto, che non ha dimensioni; il numero 2 indica due punti, che generano una retta a una dimensione; d'altra parte 3 punti non allineati generano un triangolo in due dimensioni e 4 punti generano un tetraedro nelle tre dimensioni. Inoltre tutti i numeri erano o interi (1, 2, 3 ecc.) o razionali (cioè frazioni di numeri interi).

È probabile che molto dell'insegnamento di Pitagora sia andato perduto, dal momento che i discepoli erano tenuti a mantenere rigorosamente segreti i contenuti di quell'insegnamento e le scoperte della scuola pitagorica. Inoltre, la storia della civiltà greca nel periodo che precede l'epoca di Platone presenta ancora numerose lacune. Secondo la testimonianza di Proclo (V secolo d.C.), Pitagora scoprì la costruzione delle «figure cosmiche», cioè dei cinque poliedri regolari: il tetraedro (piramide), l'esaedro (cubo), l'ottaedro, l'icosaedro e il dodecaedro. Queste figure sono anche dette «solidi platonici», in quanto Platone ne parlò diffusamente nel Timeo.

Uno dei segreti della scuola pitagorica era la costruzione del «pentagramma», inteso non come rigo musicale, ma come stella a cinque punte (viene anche detto «pentacolo»): può essere disegnato su un pentagono regolare prolungandone i lati o tracciandone le diagonali, come si vede nella figura qui sotto. Il pentagramma era il simbolo della fraternità pitagorica.

La costruzione del pentagramma non è facile, se si dispone soltanto di strumenti come una riga e un compasso, potendo tracciare cioè soltanto linee o circonferenze. Bisogna, per cominciare, costruire un triangolo isoscele la cui base coincida con un lato del pentagono e i cui lati obliqui abbiano la stessa lunghezza delle diagonali del pentagono. Questo è il cosiddetto triangolo aureo, i cui due angoli alla base hanno un'ampiezza di 72°, mentre l'angolo opposto alla base misura 36°. A questo punto la costruzione del pentagono è immediata. L'ampiezza dell'angolo interno del pentagono è pari a 36° × 3 = 108°.



Si immagini il senso di potenza che dovettero provare i pitagorici nello scoprire i segreti della costruzione del pentagono, una figura dalla quale può nascere una serie infinita di repliche sempre più piccole, come pure una serie infinita di repliche sempre più grandi; una figura, per giunta, dotata di potenti qualità numeriche e geometriche.[13]

In un pentagono il rapporto tra il suo lato e la diagonale corrisponde alla cosiddetta sezione aurea, un numero che continua a esercitare il suo fascino in una schiera di cultori che ancora oggi non mancano di cercarne sempre nuove rispondenze nelle architetture della natura. Tra gli appassionati di numerologia naturale non mancavano coloro i quali credevano che gli dèi assumessero sembianze umane per sorvegliare le azioni dei singoli uomini, delle famiglie e degli stati. Dagli inizi del XVI secolo la sezione aurea, che però cominciò a essere chiamata così soltanto nel XIX secolo,[14] è stata considerata una proporzione divina: sia perché la si riscontra dappertutto nel mondo della natura, sia perché sembra costituire un ponte tra l'infinito e semplici costruzioni finite.

Certe disposizioni dei numeri suggerirono ai pitagorici che i numeri costituissero una chiave per capire la natura del mondo fisico. Trovarono che la musica ha una base numerica, allorché scoprirono che pizzicando la corda di uno strumento musicale si produce una nota che è la stessa nota, ma di un'ottava superiore, che si otterrebbe pizzicando una corda di lunghezza doppia. Quindi estesero la teoria dell'armonia musicale a quella dell'anima. Osservando da vicino la struttura dei fiori, riscontrarono la presenza dei numeri nella natura. Vedevano i numeri nella costruzione dei loro templi, le cui forme riflettevano ciò che essi consideravano la bellezza di rapporti numerici divini. Vedevano i numeri nella scultura e nelle arti, allorché i loro artisti si sforzavano di rappresentare proprietà generali e condivise, piuttosto che l'anima individuale. Vedevano i numeri nelle opere dei loro tragediografi, costruite con una sapiente architettura di delitti e sventure. Tutta questa logica, questa architettura, questa chiarezza e questo amore per la simmetria, tutta questa ricerca di perfezione formale si applicava anche al ragionamento, nella convinzione che l'Universo fosse ordinato e spiegabile razionalmente.

La matematica era ancora una scienza giovane. L'invenzione dei numeri negativi avrebbe dovuto aspettare altri ottocento anni circa, allorché Diofanto di Alessandria li menzionò nel suo libro, Arithmetica, dopo aver trovato che $x = -4$ costituiva una soluzione assurda per l'equazione $4x + 20 = 4$.[15] Occorrerà aspettare altri cinquecento anni prima che tali soluzioni «assurde» fossero utilizzate effettivamente; fu un matematico indiano, Mahavira, ad assegnare ai numeri negativi un posto di tutto rispetto nella teoria dei numeri. Al tempo in cui fiorì la setta pitagorica, il numero 0 non era ancora stato scoperto, neppure i pomodori, non c'era il tabacco, neanche il caffè (il vino era la bevanda preferita, anche se poi ci si accontentava del latte di capra).

La scoperta del teorema di Pitagora comportò necessariamente quella degli incommensurabili. Proviamo a pensare a un quadrato di lato unitario, cioè la lunghezza del suo lato sia pari a 1: la misura della sua diagonale sarà uguale allora alla radice quadrata di 2. Sennonché la radice quadrata di 2 non può essere scritta come rapporto di due numeri interi. Non è 7/5, neanche 10/7, anche se questi numeri frazionari rappresentano approssimazioni del valore della radice quadrata di 2. Non esiste un numero intero che diviso per un altro intero dia come risultato la radice quadrata di 2.[16] Per gente che nutriva una sincera venerazione per i numeri, questo risultato era veramente sconcertante. Chiunque avesse scoperto relazioni del tipo $1^2 + 3 = 22$, $2^2 + 5 = 32$, $3^2 + 7 = 4^2$ poteva concepire il formalismo di tali disposizioni numeriche ordinate come qualcosa di magico da accreditare a una qualche saggezza divina. Ma il teorema di Pitagora, applicato a un quadrato di lato unitario, mostrava che non era possibile misurare il lato e la diagonale con uno stesso righello. Già in antico i greci avevano scoperto che c'è uno spazio non misurabile. Zenone era sicuramente al corrente di questa scoperta quando escogitò i suoi paradossi che mettevano in discussione la continuità dello spazio e del tempo.

In seguito, all'inizio del XX secolo, Bertrand Russell scrisse: «Il problema sollevato allorché si scoprì l'esistenza di numeri incommensurabili si dimostrò, con il passare del tempo, uno dei più difficili e nello stesso tempo dei più profondi fra quelli che misero a dura prova la capacità dell'umano intelletto di comprendere il mondo».[17]

I filosofi greci del V secolo a.C. insistevano a voler compiere quel progetto, avviato duecento anni prima da Talete di Mileto, di una sistematizzazione scientifica delle conoscenze basata sull'indagine della natura e che facesse a meno di una spiegazione sovrannaturale dei fenomeni. La critica razionale e il dibattito presero il posto di un pensiero meramente speculativo, spodestando i miti consolidati. Per esempio, Talete riteneva che la Terra galleggiasse sull'acqua e che il tuono fosse dovuto al suo movimento di rollio. Questo tentativo di spiegare la natura del tuono potrebbe dirsi primitivo, poiché si fondava su un'ipotesi falsa. Eppure fu un tentativo moderno, perché faceva a meno della credenza popolare nell'esistenza di influssi sovrannaturali.

I pitagorici avevano suggerito una teoria dell'atomo, anche se rozza, che fu poi ripresa da Anassagora, autore di un libro che si ritiene presentasse un resoconto completo dei fenomeni naturali (libro che ora, purtroppo, è perduto). La congettura che cose complesse dovessero essere costituite da cose più semplici fu ulteriormente sviluppata da Empedocle, un ricco medico di Agrigento. Osservando che ci sono cose irriducibili come la terra, il fuoco, l'aria e l'acqua, mise in luce che ciascuno di questi elementi in realtà rappresentava tutta una varietà di sostanze. L'acqua, per esempio, era un termine che si applicava, in generale, anche a liquidi come il metallo fuso o alle bevande. L'aria d'altra parte poteva significare qualunque gas, compresi i biogas delle mucche. Tutto questo ha un senso quasi moderno, se si pensa alla classificazione della materia in materia solida, liquida, gassosa e calore.

Calore? È materia anche il calore? Il fuoco è qualcosa di più che un'azione di distruzione. Il fuoco può essere utilizzato per tramutare i tre stati della materia o una loro combinazione negli oggetti che vediamo, o per trasformare uno stato in un altro: può trasformare il ghiaccio in acqua, e l'acqua in vapore. Empedocle, nella sua saggezza, elencò tre elementi materiali insieme a un dispositivo che potesse combinare, dare una forma e alterare le cose materiali. Senza il fuoco, le cose del nostro mondo potrebbero cambiare soltanto come risultato di collisioni e annessioni casuali. Invece, grazie al fuoco, il fabbro può esercitare l'arte di Efesto, martellando il ferro sull'incudine, modellando nuove forme e plasmando nuove cose a partire dagli elementi disponibili. Afferma Empedocle in proposito:[18]

> Come quando i pittori tavole votive screzino,
> uomini che dell'arte ben s'intendono per loro avvedutezza,
> i quali, poi ch'abbiano dunque con le man pigliato tinte multicolori,
> con mescolanza adatta, quali di più quali di meno,
> con queste acconciano forme rassomiglianti alle cose tutte,
> creando alberi e uomini e donne
> e fiere ed uccelli e pesci allevati in acqua
> e ancor gli dèi longevi, per onore primi;
> così l'inganno non ti sopraffaccia la mente, che altrove sia
> la fonte delle mortali cose, quante sono venute all'evidenza, infinite,
> ma questo chiaramente sappi, parole avendo udito che vengono dal dio.

Anche qui si pone la questione di che cosa si ottiene quando esaminiamo molto da vicino gli elementi e li consideriamo, sia pure su una base puramente ipotetica, come oggetti indivisibili di dimensioni incredibilmente piccole. L'atomismo sostiene che le cose consistono in sostanze così piccole da sfuggire ai nostri sensi. Gli atomi indivisibili sono pensati differenziati, cioè di diversi tipi, con forme e dimensioni diverse, da noi percepibili soltanto dopo che siano stati catturati, agganciati e connessi in modo da formare, insieme, una massa, il che avviene grazie al loro movimento e alle collisioni che si producono nel vuoto. Ciò che gli atomi diventano dipende dalla loro forma, dalla disposizione reciproca e dalla loro posizione. Questi raggruppamenti di atomi possono rendere percettibile ciò che è impercettibile, ma possono anche disgregarsi, rompere cioè i loro legami, facendo sì che il visibile torni a essere invisibile. C'è una somiglianza sbalorditiva tra questa antica teoria atomica e la nostra, la teoria atomica del XXI secolo, allorché pensiamo che tutta la materia si compone di atomi e che noi possiamo vedere la materia soltanto quando un numero sufficiente di atomi si è compattato in modo da formare una sostanza visibile. Vediamo l'oro soltanto quando ci sono sufficienti atomi di oro da rendere visibile il loro assemblamento.

La scienza atomica del V secolo a.C. era il risultato di uno sforzo d'immaginazione, del quale troviamo traccia in dialoghi dove la teoria atomica si confronta con teorie alternative egualmente creative. Nella teoria atomica antica non ci sono misure di peso atomico, né esistevano strumenti che consentissero di esaminare la materia più finemente, neanche un po', di quanto potesse fare il miglior paio di occhi. Però quella teoria comportava certe conseguenze che facevano nascere ulteriori interrogativi.

Il primo a formulare una teoria atomica della materia fu Leucippo, filosofo greco del V secolo a.C., il cui pensiero fu notevolmente influenzato da Zenone e Parmenide: sosteneva che gli atomi sono particelle impercettibili, piccolissime e indivisibili, diverse l'una dall'altra solo per forma e proprietà posizionali. Questa meravigliosa teoria di Leucippo, in seguito sviluppata dal suo discepolo Democrito e che portò a risultati scientifici imprevedibili, si riallaccia direttamente al problema che aveva messo in imbarazzo i pitagorici, quello di un'espressione razionale per la misura della diagonale di un quadrato in rapporto al lato del quadrato stesso. È probabile che i pitagorici pensassero a un segmento come a una serie ordinata di atomi, perciò un segmento lungo il doppio di un altro avrebbe dovuto contenere un numero di atomi doppio. Se così stanno le cose, ci dev'essere un rapporto ben definito fra le lunghezze di due segmenti qualsiasi, dal momento che il numero di atomi di ciascuno dev'essere finito: pertanto il rapporto delle loro lunghezze dev'essere esprimibile come una frazione, il cui numeratore è il numero di atomi contenuti nel primo segmento, mentre il denominatore è il numero di atomi contenuti nell'altro.

La spiegazione atomista è che bisogna distinguere tra atomo fisico e punto geometrico. L'atomo è indivisibile e indistruttibile, mentre il punto è un'astrazione mentale senza alcuna sostanza fisica. Secondo gli atomisti le sostanze materiali potevano continuare a essere sminuzzate sino a un limite umanamente possibile: oltre quel limite, nessuna ulteriore divisione poteva aver luogo. Se prendiamo un bastone di legno – così ragionavano – certo possiamo dividerlo in due parti. Quindi ogni giorno prendiamo la parte più lunga e dividiamola in altre due parti. Continuiamo quest'opera di suddivisione indefinitamente: dopo tanto sminuzzare, verrà il momento in cui avremo in mano due parti delle quali neanche quella più lunga potrà più essere chiamata un bastone, però potremo continuare a dire che è un pezzo di legno. Ma quanto tempo dovrà passare prima che il legno diventi non-legno? Anche il più piccolo granello di segatura è ancora legno.

Anassagora conosceva il gruppo di persone che si era raccolto nel Ceramico di Atene per ascoltare Zenone, ed era un buon amico di Euripide e di Pericle. Scrisse un libro di fisica, il suo unico libro, nel quale offriva un panorama completo del mondo naturale, argomentando che c'è un poco di tutto in ogni cosa. Com'è che un capello umano nasce dal niente? La risposta suggerita da Anassagora è che il cibo metabolizzato dagli uomini contiene già il capello e tutto quanto si trova nel capello stesso, anche se è impercettibile ai nostri sensi. Secondo Anassagora il legno, anche se ridotto nella forma estremamente sminuzzata di un granello di segatura, contiene un po' di ogni altra sostanza, ivi compresa la sostanza presente in un capello umano; questa concezione deriva dalla filosofia di Empedocle e di Eraclito di Efeso, i quali affermano che la materia può essere trasformata ma non distrutta. È possibile che questi uomini si siano domandati come mai l'olio di una lucerna scompaia via via che la fiammella arde nel corso della notte: probabilmente, nel darsi una risposta, preannunciarono le nostre moderne leggi di conservazione della materia e dell'energia; noi sappiamo infatti che la materia e l'energia possono trasformarsi in altre forme di materia o di energia, e l'una nell'altra.

Empedocle si era fatto l'idea, ragionevolmente corretta, che qualunque cosa può derivare da quattro elementi. Leggiamo in un frammento che ci è pervenuto grazie a Sesto Empirico:[19]

> Odi infatti le quattro radici d'ogni cosa primamente:
> splendido Zeus, Era ravvivatrice e poi Aidoneo,
> e Nesti, che di sue lacrime alimenta il flusso di sorgente peritura.

Qui Empedocle intende con Zeus il fuoco, con Era l'aria, con Aidoneo la terra, e con Nesti l'acqua. E, ancora, più direttamente:[20]

> Ora su, io di dirò dapprima, ponendo al principio il sole,
> da quali cose vennero all'evidenza quelle ch'ora vediamo, tutte quante,
> la terra e il ponto[21] dalle molte onde, non che l'aere umido,
> ed il Titano etra che rinserra all'intorno[22] nel suo cerchio, le cose tutte quante.

Ma se le sostanze elementari dell'Universo sono soltanto la terra, l'aria, il fuoco e l'acqua, com'è che vediamo altre sostanze che apparentemente sono diverse da queste quattro? Ancora una volta, ci viene suggerito di non affidarci alle apparenze. Dobbiamo aver fiducia nei nostri sensi o non dobbiamo piuttosto far leva sulla nostra capacità di ragionamento?

Il problema della divisibilità ci porta direttamente al cuore del problema della fiducia che possiamo accordare ai sensi. Eraclito, soprannominato «l'oscuro», riteneva che tutto fosse soggetto a trasformazione e fu il primo filosofo a fare una distinzione tra la ragione e i sensi, come leggiamo in questo frammento:[23]

> Cattivi testimoni sono per gli uomini occhi ed orecchie, se hanno un'anima che nella sua barbarie non li intende.

Ma noi ricaviamo la conoscenza della natura dalla sola ragione, o la ricaviamo dai soli sensi?

Secondo Parmenide, abbiamo percezione del cambiamento, ma la ragione lo esclude. Due sono le vie per pensare: la prima via dice che l'essere è e non può non essere, l'altra che l'essere non è e che può non essere. La prima via è effettivamente percorribile ed è caratterizzata dalla verità e dalla persuasione: la Verità è infatti in grado di persuadere. Ecco quanto si legge nel suo Poema della natura:[24]

> Ora su, io dirò, e tu riservati il ragguaglio che sentito avrai,
> quali sono le vie della ricerca che sole son da pensare:
> l'una, per cui è e non v'è caso che non sia,

è di Convinzione il sentiero (essa è in effetti di scorta a Verità);
è l'altra quella per cui non è ed anche gli occorre di non essere,
ed è questa che io t'avverto essere la pista di cui non si può del tutto aver notizia,
ché né potresti conoscer proprio ciò che non è (non è infatti cosa attuabile),
né potresti darne avvertenza.
[...] Ché è una stessa cosa quella da pensare e che ha da essere.

Secondo Parmenide, dunque, la conoscenza della natura è basata esclusivamente sulla ragione, la quale al suo tempo era un'attività concepita in modo nuovo e non, come avrebbero detto i pitagorici, basata sull'osservazione: «Abitudini inveterate ed esperienze passate possono indurti nella tentazione di usare come strumenti di conoscenza l'occhio che è cieco, l'orecchio che è frastornato e la lingua, ma lascia che a decidere sia la ragione». Questo diceva Parmenide: «Guardati dai sensi».

Anche Eraclito si era occupato della questione di quale delle due, l'osservazione o la ragione, fosse la strada per la verità. Secondo lui era l'osservazione dal momento che – affermava – tutto cambia. Perciò come potrebbe la ragione, che dev'essere fissa, portare alla verità riguardo a un mondo dove tutte le cose cambiano da un momento all'altro? Non era male come argomentazione, ma Parmenide avrebbe ribattuto: «Ma veramente la terra si trasforma in acqua e l'acqua si trasforma in vapore? L'acqua è meno densa della terra e il vapore è meno denso dell'acqua. Perché ci possa essere trasformazione dall'uno all'altro bisognerebbe introdurre uno spazio vuoto. Ma lo spazio vuoto è il nulla, che non esiste. Perciò non c'è niente che possa dirsi cambiamento. Il mondo è un unico Universo, solido, sferico e immobile, nel quale non è possibile il cambiamento, in base al principio che il niente non può essere qualcosa».

La ragione aveva acquisito nuove regole; fra queste, quella – era stata finalmente individuata ed era meravigliosa – che prende il nome di principio di non contraddizione. Nella formulazione che ne darà Aristotele, il principio di non contraddizione afferma che «una cosa non può essere e non essere nello stesso modo e nello stesso tempo», proprio come il niente non può essere la cosa che rende possibile la trasformazione dell'acqua in vapore. L'uso della ragione e delle sue regole avrebbe stimolato lo sviluppo del pensiero del mondo classico per centinaia di anni e avrebbe promosso il raggiungimento delle vette di conoscenza scientifica ancora migliaia di anni dopo.

Zenone spiegava come il movimento fosse impossibile dal momento che, perché un oggetto si sposti a una qualche distanza, deve dapprima spostarsi di metà di quella distanza, quindi deve coprire la metà della distanza ancora da percorrere, e così via, dovendo sempre raggiungere la metà di qualche distanza ancora da raggiungere: perciò non arriverà mai a completare il percorso. Aristotele scriverà che questo paradosso suggerisce che il movimento è impossibile perché per quanto l'oggetto in moto si avvicini a un qualunque punto assegnato, prima di raggiungerlo dovrà sempre compiere la metà della distanza che li separa, quindi la metà di quella metà, e così via senza fine. Zenone scrisse tutto questo in un libro, che lui sostiene sia stato rubato;[25] nel libro sarebbero stati descritti «quaranta diversi paradossi che scaturiscono dal voler assumere come vere l'ipotesi di pluralità e di movimento delle cose».[26] Deve essere stata una perdita irreparabile, se si pensa alle pagine che Zenone, avendo ben ponderato le parole da scrivere, aveva riempito giorno dopo giorno, incollando poi le pagine l'una accanto all'altra, in modo da ottenere i cosiddetti «scapi» che poi, assemblati, avrebbero costituito il rotolo, o i rotoli, di papiro.

Ci sono molti modi di intendere il pensiero di Zenone sull'impossibilità del moto, modi che certamente egli aveva preso in considerazione. Significa che nessun compito può mai giungere a termine, dal momento che per poterlo finire bisogna dapprima compiere metà del lavoro, e dopo che si è compiuta la prima metà bisogna compiere metà del lavoro rimanente, e così via all'infinito. Lo stesso si può dire, in generale, di qualunque cosa si voglia intraprendere: la lettura di questo libro, o l'impegno a vincere – nella Grande Panatenea – il primo premio alla corsa con i carri (il premio consisteva in centoquaranta anfore panatenaiche piene di olio d'oliva). I matematici possono confutare il paradosso molto semplicemente affermando che la somma della serie 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... è uguale a 1, ma non possono dare una risposta alla domanda su come effettivamente il compito viene portato a termine. La matematica ci dice che cosa avviene, senza spiegarci perché.

Quando Zenone si ritirò con Parmenide, Pitodoro, Aristotele e Socrate nella casa di Pitodoro nel Ceramico, attraversò un cortile, passò di fronte alle stalle, fece qualche passo sotto un portico; quindi, andando oltre il gineceo, fu introdotto in un ambiente abbastanza ampio, arredato con sedili, provvisti di cuscini, allineati lungo le pareti e affacciati a un focolare, al centro del pavimento di pietra.[27] È probabile che assistesse alla preparazione di un simposio che avrebbe avuto luogo più tardi, la sera stessa, dopo la celebrazione delle feste Panatenee: perciò si versava l'olio nelle lucerne e si riempivano le anfore del vino e dell'acqua.

A questo punto Zenone affermò che se una freccia fosse scoccata verso un certo bersaglio, e fosse osservata in un qualsiasi istante ben preciso, la freccia sarebbe apparsa ferma. Ma se la freccia appare ferma in un qualsiasi istante, com'è che può muoversi? Addirittura, com'è concepibile che la freccia possa allontanarsi dall'arco, per non parlare del problema di attraversare l'aria e raggiungere il bersaglio?

Si potrebbe rispondere che è assurda proprio la nozione di fissare un punto del tempo e che non ha senso affermare che «la freccia in un qualsiasi preciso istante apparirebbe ferma». Nella matematica, tuttavia, il tempo è una variabile che può essere fissata: è sufficiente dire che è uguale a un certo numero di unità di tempo a partire da un qualche istante iniziale. Le formule matematiche ci dicono dove la freccia si trova in un tempo t qualsiasi, così se poniamo t uguale a un qualche tempo ben preciso, per esempio due secondi dopo che la freccia ha lasciato l'arco, dovremmo essere in grado di conoscere il punto esatto dove la freccia si trova allorché $t = 2$. Ma esiste una qualche cosa che sia esattamente due secondi o anche un punto ben preciso? Sappiamo che se veramente vogliamo fare una fotografia della freccia nell'istante $t = 2$, dobbiamo tenere l'otturatore della macchina fotografica aperto per un intervallo di tempo nell'intorno di $t = 2$. L'otturatore non può essere aperto e chiuso nello stesso istante.

Le rappresentazioni matematiche dei fenomeni fisici sono in realtà modelli mentali. La chiave per comprendere il ragionamento di Zenone consiste nel capire il nesso fisico-matematico conseguente all'operazione di assegnare al tempo un valore ben definito. Qui il matematico ha il ruolo del prestigiatore. Fermare il tempo per poter osservare la freccia come se fosse ferma? Certo, così di fatto potremmo congelare il movimento, ma ciò che vediamo non è la freccia reale, è un'altra freccia che si muove nella nostra mente.

La continuità suggerisce un percorso non interrotto. Noi ci muoviamo da qui a lì senza attraversare vuoti di spazio. Infatti, il movimento ci appare senza interruzioni. Eppure ci siamo fatti l'idea che gli oggetti si muovano attraverso lo spazio su una retta o una curva fatta da un insieme ordinato di punti che possono essere rappresentati da numeri, numeri che esprimono, per esempio, la distanza da un estremo della curva. Il fatto è che per un numero qualsiasi su una curva, per così dire, numerizzata, non c'è proprio nessuna cosa che possa chiamarsi un numero successivo.[28] Ma allora, com'è che ci muoviamo da un punto numerizzato a quello successivo, se non c'è nessuna cosa che possa dirsi un numero successivo? Questa è la freccia micidiale che Zenone ha in serbo nella sua faretra. Se un percorso è costituito da un insieme di punti, allora il moto di un oggetto non può generare un percorso.

Tobias Dantzig, che nel ventesimo secolo scrisse parecchi libri di divulgazione matematica, mise la cosa molto bene in questi termini:[29]

> Quando osserviamo il moto di un pallone che descrive nell'aria una certa traiettoria, percepiamo il moto come un tutto e non come una successione di salti infinitesimali. Una linea matematica, d'altra parte, non è la vera, o anche soltanto attendibile, rappresentazione di un filo. L'uomo è stato addestrato a ricorrere a queste finzioni per così tanto tempo che, dovendo scegliere tra una cosa reale e il suo sostituto, preferisce il sostituto.

Proprio così, siamo stati addestrati a manipolare finzioni. Vediamo una palla per aria e presumiamo che ciò che vediamo sia ciò che di fatto avviene. Ma l'organo della vista è la mente, non è l'occhio. Consideriamo per esempio quell'antesignano del cinematografo che prende il nome di zootropio, inventato da un matematico inglese, W.G. Horner: consiste in un cilindro rotante sulla cui superficie laterale è praticato un certo numero di fessure verticali, mentre all'interno si trova un cartone, contenente una dozzina di immagini ferme, che rappresentano le diverse posture di un uomo in corsa. Osservando quei disegni attraverso le finestrelle in rapida rotazione davanti ai nostri occhi, quelle figure ci appaiono animate: abbiamo l'illusione che l'uomo effettivamente si muova.

Oggi in una sala cinematografica sperimentiamo lo stesso genere di illusione del movimento, più elaborata. Un'ora di un film comprende 86 400 fotogrammi diversi l'uno dall'altro, eppure vediamo le scene svolgersi sotto i nostri occhi con perfetta continuità. Al cinema i tre secondi di una palla in volo corrispondono a 72 fotogrammi diversi che ci descrivono il movimento della palla proprio come se avessimo davanti agli occhi la palla vera. Se per rappresentare questi tre secondi di volo della palla raddoppiassimo il numero dei fotogrammi e conseguentemente raddoppiassimo la velocità del film, non per questo avremmo una visione più realistica della continuità del moto. C'è una qualche magia naturale in quella soglia di fotogrammi per secondo (24) che inganna la mente facendole pensare che il movimento che vediamo è continuo. Sembra tuttavia che la mente abbia una velocità di elaborazione ben superiore ai 24 fotogrammi al secondo, integrando informazioni più velocemente di quanto lo scorrimento di una pellicola cinematografica può sottoporci.

Forse la tesi di Zenone contro il moto ha ragione d'essere. Forse il moto fisico semplicemente non può essere rappresentato da uno spazio e un tempo matematici per intervalli arbitrariamente piccoli, di là dall'esperienza misurabile. David Hilbert e Paul Bernais, due grandi matematici del XIX secolo, fornirono questa risposta inquietante:[30]

> Di fatto il paradosso può avere anche una soluzione molto più radicale. Essa consiste nel considerare che non siamo per niente obbligati a ritenere che la rappresentazione matematica del moto nello spazio e nel tempo abbia un significato fisico per intervalli spaziali e temporali arbitrariamente piccoli; ci sono invece tutti i presupposti per ritenere che quel modello matematico estrapoli i fatti di un certo ambito di esperienza, cioè il moto definito con gli ordini di grandezza finora accessibili alla nostra osservazione...

Zenone era conosciuto come «bilingue» perché spesso si compiaceva di dimostrare entrambi gli aspetti dei suoi stessi argomenti, che normalmente investivano il concetto di infinito o quello di infinitesimo. In due dei suoi paradossi si assume che lo spazio e il tempo consistano in un numero finito, rispettivamente, di punti e di istanti, mentre negli altri due (dei quattro che ci sono avanzati) si assumono le ipotesi opposte. Vi sono soltanto tre modi per sfuggire a questi paradossi: 1) affermare che lo spazio consiste in punti e il tempo consiste in istanti, e che in ciascun intervallo spaziale c'è un numero infinito di punti e in ciascun intervallo temporale un numero infinito di istanti; 2) affermare che gli intervalli spaziali non contengono punti e quelli temporali non contengono istanti; 3) negare insieme l'effettiva esistenza dello spazio e del tempo.

Zenone poneva tali problemi più di due millenni prima che si affacciassero alla ribalta scientifica la teoria quantistica e quella relativistica, dove la nostra esperienza del moto e il nostro senso di continuità confliggono con le spiegazioni logiche di ciò che noi assumiamo essere la realtà. A livello macroscopico il moto non ci dà problemi, perché sappiamo intuitivamente, grazie all'esperienza, ciò che ci aspetta, ma non avendo alcuna esperienza sensoriale su scala microscopica, ecco che ci troviamo nell'imbarazzo di dover affrontare sorprese controintuitive.

Tutti quelli che credono nell'assunto atomistico per cui tutta la materia è costituita da atomi, essendo gli atomi indivisibili e indistruttibili, devono anche credere che un oggetto in movimento debba spostarsi da un certo punto al successivo, parallelamente al trascorrere del tempo da un istante al successivo. Per dimostrare l'inconsistenza di questo assunto, Zenone assumeva che il tempo si muovesse dal passato al futuro in una sequenza di istanti successivi. Assumeva anche qualcosa che era molto più accettabile: se un oggetto avanza sempre nella stessa direzione, non può trovarsi nello stesso posto in due istanti diversi. Sappiamo che i filosofi che vennero dopo Zenone, dovendo dare una risposta al paradosso sul moto, non sapevano che pesci pigliare. Sono passati più di ventiquattro secoli prima che persone dotate di intelletto riuscissero a dare un senso al paradosso. Anche Aristotele sembrava confuso, allorché ne fece menzione nella sua Fisica. Ma adesso noi disponiamo di una più chiara comprensione di ciò che Zenone avrebbe potuto intendere.

Consideriamo tre punti adiacenti e chiamiamoli A, B, C. Supponiamo cioè che B si trovi immediatamente a destra di A e che C si trovi immediatamente a destra di B. Un oggetto non può portarsi dal punto A al punto C in un singolo istante indivisibile, perché se ciò fosse possibile, non ci sarebbe alcun istante in cui l'oggetto può trovarsi nel punto B. Naturalmente, questo è assurdo, perché significherebbe che tutti i movimenti si compirebbero alla stessa velocità. L'unico modo per uscire dalle corna del dilemma consiste nel negare che i punti o gli istanti siano consecutivi, cioè disposti gerarchicamente da sinistra a destra e viceversa. Ma questa seconda ipotesi comporta una riflessione egualmente imbarazzante su come un oggetto in movimento si sposti da un punto all'altro. Se un oggetto si muove da A a C, ci dev'essere stato un momento in cui si trovava nel punto B tra A e C. E ci dev'essere stato un momento in cui si trovava in un punto intermedio tra A e B. E così via, indefinitamente.

Nel paradosso dello stadio Zenone ci chiede di immaginare tre linee orizzontali, una sopra l'altra. Segniamo alcuni punti su queste linee: nella linea superiore segniamo i punti che chiameremo A_1, A_2, A_3 ecc.; nella linea mediana segniamo i punti B_1, B_2, B_3 ecc.; infine nella linea inferiore segniamo i punti C_1, C_2, C_3 ecc. Le lettere indicano le linee (A = linea superiore; B = linea mediana; C = linea inferiore), mentre i numeri indicano la disposizione dei punti lungo ciascuna linea. Adesso immaginiamo una disposizione dei punti tale che i punti designati dallo stesso numero si trovino incolonnati:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

Quindi immaginiamo che nell'istante successivo la linea superiore sia rimasta dov'era, mentre quella mediana si sia spostata a sinistra con una velocità costante v, e quella inferiore si sia spostata nel verso opposto, a destra, con la stessa velocità v:

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & \\ B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & & C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

Anche qui supponiamo che le linee siano costituite da punti discreti. Avrete notato che nell'istante che precede gli spostamenti in senso orizzontale delle linee, i punti designati con il pedice 2 (A_2, B_2 e C_3) erano incolonnati. Nell'istante successivo, invece, A_2 risulta allineato con i punti B_3 e C_1. Sembra che B_3 si sia allineato con C_1, saltando il punto C_2. In altre parole, non c'è stato nessun istante in cui A_2, B_3 e C_2 si sono trovati incolonnati. Che cos'è successo? La risposta centra in pieno ciò che stava a cuore a Zenone. Il risultato assurdo – questa è la conclusione alla quale ci porta Zenone – è una conseguenza del fatto che abbiamo sbagliato assumendo le nostre ipotesi iniziali: abbiamo cioè sbagliato nel ritenere che la linea sia costituita da un insieme di punti discreti. Possiamo considerare la spiegazione del paradosso dello stadio formulato da Zenone come una prova indiretta del fatto che la linea non è costituita da punti discreti.

La natura è dunque immaginata continua, sia da parte della nostra mente, per esempio quando guardiamo un film, sia dalla ragione, come dimostra il paradosso dello stadio di Zenone. Eppure la natura compie effettivamente dei salti. Il pezzo di legno che continuiamo a sminuzzare sembra che rimanga legno anche dopo molte suddivisioni, ma viene un momento in cui ci sarà una specifica divisione in cui la segatura di legno improvvisamente diventa qualcos'altro, che non è più legno. Sappiamo oggi che questo è il primo di numerosi salti da compiere nel processo di suddivisione della materia che ci porta a individuare prima l'atomo, poi i costituenti dell'atomo. Dopodiché, come vedremo nel capitolo 14, dovremo affrontare operazioni di separazione che possono aver luogo soltanto nella nostra mente.

3. Il mondo attraverso gli occhi di Aristotele

Siamo nel 343 a.C.: Aristotele aveva l'abitudine di fare lunghe passeggiate dalla reggia di Pella, capitale della Macedonia, sino a una delle porte della città, una porta minore, affacciata sul fiume Axio. Era nato a Stagira, una grossa città macedone della Calcidica, non lontano da quelle tre «dita» di terreno protese nel mar Egeo, dove i fichi selvatici durano fatica a crescere su un suolo roccioso. È abbastanza raro che questi alberi portino frutto: eppure, in via eccezionale, era talvolta possibile cogliere qualche fico, nascosto nel fogliame. Ad Aristotele piaceva camminare, passeggiava spesso su quella strada polverosa tracciata nell'arenaria che correva lungo il muro di cinta fino a quella porticina. Perciò lo chiamavano «il peripatetico». Anche se non vide giusto sui dettagli, il suo contributo alla conoscenza, un contributo che fu riferimento autorevole per il mondo occidentale per più di mille anni, fornì una spiegazione per pressoché ogni cosa del mondo naturale.

Aristotele scrisse in totale 337 libri di vario argomento, dall'amore alla medicina.[1] L'abbigliamento rivelava una non dissimulata cura della persona: vestiva in maniera vistosamente stravagante, il taglio dei capelli era accurato, le dita inanellate. Il volto era accuratamente rasato, indossava ornamenti preziosi. Fu precettore di Alessandro Magno in botanica, zoologia e fisica. Alessandro aveva allora tredici anni, non era ancora l'imperatore della Macedonia, della Grecia, del Nord Africa, della Persia e del Punjab (una regione posta a cavallo dell'attuale frontiera tra India e Pakistan).

Aristotele aveva della natura un concetto allargato, molto diverso dal nostro. Per lui, lo studio della natura comprende l'indagine di «tutte le cose che si muovono o cambiano». Era lo studio – così scrive nella sua Fisica – delle cose che presentano variazioni: nel senso che passano da «qui» a «lì», o nel senso, più ampio, che passano da «questo» a «quello», intendendo con questa seconda espressione «diventare qualcosa che non si era prima», come quando un solido diventa liquido o una sostanza calda diventa fredda.[2]

Il concetto di variazione è abbastanza ampio da applicarsi a cose che cadono, sorgono, si immergono, si espandono, o anche alle anime che trasmigrano. Per esempio, una pietra che rotola sul pendio di una collina, una sostanza fredda che diventa calda, la formazione di una bolla nell'acqua di una pentola sul fuoco, un blocco di marmo pentelico che diventa un busto di Hermes, un intelletto che viene persuaso da un argomento stringente o ancora – per dirla con Aristotele – un uomo rozzo che diventa colto. Tutto questo comporta un movimento, nel significato più ampio della parola.

Le tesi di Aristotele implicano che sviluppando la nostra intelligenza delle cose possiamo arrivare a cogliere le gioie della vita. È un'esigenza vitale: è la vita di tutti i giorni, con tutto il suo seguito di sensazioni, che ci chiede di sviluppare la capacità di comprendere la natura delle cose. C'è di che rincuorarsi, questa concezione della conoscenza ci apre nuovi orizzonti e ci fa sperare per il meglio, soprattutto se rapportata a quella un po' desolante della dottrina platonica, secondo cui la conoscenza dell'uomo è sempre ben al di sotto degli ideali irraggiungibili. È difficile per noi immaginare un'epoca in cui tutte le scienze erano unicamente riflessioni sulla natura, senza esperimenti, un'epoca in cui chiunque poteva formulare ipotesi sull'Universo in base alla sensazione di aver intravisto uno spiraglio di verità, intorno al quale argomentare poi con abilità tutta una teoria. Un'epoca in cui non c'erano né laboratori né tecniche di campionamento statistico per misurare la probabilità di certe affermazioni. Nel IV secolo a.C. tutto ciò che era necessario per formulare una teoria scientifica era il ragionamento. Aristotele sviluppò le sue teorie a partire da un insieme di princìpi che riteneva irrefutabili: sosteneva che non è possibile ragionare se non partendo da princìpi, definizioni e ipotesi. Così, dovendo parlare del cambiamento, cominciava ipotizzando che «tutte le volte che una cosa cambia, essa cambia o perché si ha il passaggio da una cosa a un'altra, o perché da una quantità si passa a un'altra quantità, o da una qualità a un'altra qualità, o da un posto a un altro posto; ma non c'è nessun cambiamento che, comprendendo tutti questi generi di cambiamento, non sia un cambiamento sostanziale, né quantitativo, né qualitativo e che non sia riducibile a nessuna delle altre categorie...».

Il moto per lui era qualcosa di più che un mero spostamento, il movimento di un oggetto da un posto all'altro. Era movimento nella qualità (dal nero al bianco), nella forma (come quando una pera perviene a maturazione), nella quantità (un accrescimento delle dimensioni), o nello spostamento. La causa per cui tutte le cose si muovono, cambiano o passano da questo a quello, è da ricercare nell'ambito naturale: «La natura è il principio del movimento e del cambiamento. E poiché noi siamo interessati all'indagine della natura, dobbiamo capire che cosa sia il "movimento". In primo luogo, dovremmo capire che il movimento è "continuo" e che la continuità implica il concetto di "infinito" (ápeiron)». Era una rivelazione sbalorditiva.

Nella parte della sua Fisica dedicata al movimento (libri V-VIII), Aristotele afferma che, perché possa aversi movimento, dev'esserci in primo luogo continuità, e che perché ci sia continuità dev'essere possibile una divisione all'infinito. Non pensava alla divisione di oggetti fisici come un bastone, il quale può essere diviso soltanto finché si arriva all'estremo degli atomi indivisibili: pensava piuttosto alle dimensioni dello spazio e del tempo nei quali il bastone si colloca.

Leggendo le considerazioni di Aristotele sul movimento ci si può domandare perché qualcosa che si muove debba muoversi attraverso un tempo e uno spazio indefinitamente divisibili. La risposta è una reminiscenza di Zenone: qualunque cosa soggetta a un cambiamento deve cambiare nel tempo e nello spazio, perciò il tempo dev'essere divisibile, perché se qualcosa non può essere analizzata in relazione al tempo, non può muoversi nello spazio. Aristotele sosteneva che una cosa soggetta a cambiamento non può cambiare da qui a lì o da questo a quello in un baleno, perché se così fosse dovrebbe esserci un preciso istante in cui la cosa, tutta la cosa, si è trasformata d'un tratto da questo a quello. Cercava di mettere in relazione il tempo con il cambiamento, asserendo che il tempo è continuo e che perciò anche il cambiamento è continuo.

Aristotele sosteneva la relazione tra la continuità matematica e la continuità del mondo materiale osservando che un oggetto in movimento non può spostarsi da una posizione all'altra saltando le posizioni intermedie: deve necessariamente muoversi da una posizione a quella immediatamente contigua. Non era, però, un atomista. Secondo lui, la continuità dello spazio non comporta una divisione all'infinito dell'oggetto che attraversa lo spazio. Questo può sembrare contraddittorio e ricorda gli argomenti di Zenone. Come può un oggetto spostarsi da una posizione a quella successiva, se lo spazio non è divisibile in unità discrete?

Scrisse Aristotele che «il movimento non è concepibile se non in relazione alla posizione, al vuoto e al tempo». Scrisse anche: «Queste quattro cose – posizione, vuoto, movimento e tempo – sono condizioni universali, comuni a tutti i fenomeni naturali».

Il movimento può aver luogo soltanto per contatto diretto tra l'agente che provoca il movimento (il «motore») e l'oggetto in movimento: per esempio, il cuneo del cavatore di pietre spacca la rupe, le mani del vasaio plasmano la creta, la tessitrice aziona rapidamente i licci del telaio per separare i due ordini di filo dell'ordito e farvi passare avanti e indietro il filo della trama, creando il «passo» con movimenti perfettamente sincronizzati. E se si tratta di un bastone in movimento, vuol dire che la sua parte anteriore trascina quella posteriore, oppure la parte posteriore spinge quella anteriore.

Affermava Aristotele: «Considerando il "motore", cioè l'iniziatore del movimento, non già nel significato di ciò per il cui volere si ha il movimento, ma in quello di ciò che mette in movimento, possiamo affermare che il motore dev'essere in diretto contatto con la cosa che esso muove immediatamente; con ciò intendo dire che non ci dev'essere niente tra loro. Questo è vero di qualunque motore e di qualunque cosa che è mossa per impulso del motore».

La percezione uditiva implica che vi siano particelle d'aria che colpiscono la membrana del timpano. Sappiamo oggi che percezione visiva implica che vi siano onde di luce che stimolano la retina. Certo, Aristotele non aveva cognizione dei coni e dei bastoncelli che costituiscono la retina: tuttavia il meccanismo della visione è in accordo con la sua concezione della natura. Che dire allora delle emozioni: della paura, dell'ira e dell'amore? Aristotele le attribuiva al flusso sanguigno. Affermava che «l'ira è dovuta al sangue che ribolle, o al calore circoscritto nella regione del cuore». Secondo lui, l'intelletto ha sede nel cuore e gli occhi sono le finestre dell'anima. Così tutto potrebbe essere spiegato mediante il contatto e il moto impresso da una cosa all'altra.

Il contatto diretto tra motore e mobile si applica a tutti i generi di movimento: allo spostamento da un punto all'altro dello spazio, sia nel caso in cui l'oggetto in movimento è azionato da se stesso, sia in quello in cui è posto in moto da un altro agente; al movimento qualitativo, come nel caso della maturazione di una pera; o al movimento quantitativo, come quando vediamo un gregge di capre che si disperde nel pascolo o che si raccoglie. Ma tutto ciò che si muove si deve muovere, in un certo lasso di tempo, da un qualche posto a un altro, oppure da una certa condizione a un'altra.

Come il movimento postula il tempo, così il tempo postula il movimento. Scrive Aristotele nella sua Fisica: «Pertanto, come non vi sarebbe il tempo se non vi fosse distinzione fra questo "adesso" e quell'"adesso", se cioè l'"adesso" fosse sempre lo stesso, analogamente è evidente che non vi sarebbe alcun tempo tra due "adesso", quando non fossimo in grado di distinguerli». Il tempo e il movimento sono perciò cose diverse ma non possiamo disgiungerli l'uno dall'altro. Aristotele ci chiede di immaginare il tempo senza il movimento o il movimento senza il tempo. È impossibile: «Anche se fossimo al buio e inoltre non avessimo nessuna sensazione corporea, tranne la sensazione che qualcosa nel nostro intelletto "va avanti", dovremmo essere in grado, in base a questa sola esperienza, di riconoscere il passaggio del tempo». Secondo Aristotele, il movimento costituisce un passaggio obbligato per capire il tessuto autentico dell'Universo.

Il tempo è la misura del movimento, e viceversa. Ancora oggi misuriamo il tempo in termini di spostamenti fisici. Il tempo è misurato dalla traccia di qualcosa che separa un «prima» e un «dopo», di preciso significato fisico. Ogni orologio, indipendentemente dalla sua precisione – dal pendolo di Huygens (su progetto originario di Galileo) al moderno orologio atomico la cui precisione è dovuta al fatto che comprende un oscillatore in grado di sviluppare miliardi di oscillazioni ogni secondo – misura il tempo grazie a una qualche forma di meccanismo generatore di un movimento ripetitivo.

Aristotele ci presenta un rompicapo. Se ogni movimento venisse a cessare nell'Universo per un certo intervallo di tempo, come potremmo interpretare quell'intervallo? Se non esiste movimento, allora non esiste neppure il tempo di quell'intervallo, si ha cioè un collasso dell'intervallo di tempo, come se non ci fosse mai stato. In altre parole, ogni intervallo di tempo deve rappresentare il movimento di qualcosa nell'Universo.

Il concetto che Aristotele ha del tempo, in fondo, è relativistico. Potremmo domandarci che cosa sarebbe del tempo se nell'Universo ci fosse una sola cosa in movimento. Dovremmo risponderci che in questo caso sarebbe comunque possibile definire un intervallo di tempo che avrebbe una sua certa misura, basata sul movimento di quel singolo oggetto. Ma che cosa sarebbe della misura del tempo quando cominciasse a muoversi anche un secondo oggetto? La risposta di Aristotele è che se un oggetto copre una distanza inferiore rispetto a quella coperta da un secondo oggetto nello stesso intervallo di tempo, allora il primo oggetto si muove «più lentamente»: dunque il tempo continua a essere una misura riferita al soggetto pensante. In altre parole, «noi non diciamo che il tempo è in sé "rapido" o "lento", ma che consiste di "molte" o "poche" unità nelle quali è conteggiato; oppure diciamo che il tempo è "lungo" o "breve", quando ne consideriamo la continuità. [...] Infatti, i numeri astratti non sono in nessun caso rapidi o lenti, mentre può esserlo il loro conteggio». Di fatto, Aristotele misura la velocità qualitativamente, seguendo la tradizione greca di spiegare i fenomeni per mezzo di proporzioni e analogie. Anche noi diciamo «rapido» oppure «lento» in senso relativo, in rapporto a distanze «grandi» o «piccole» coperte in un certo intervallo di tempo.

Aristotele riteneva che, se il tempo è continuo, tale deve essere anche lo spazio.

Eppure il tempo è diviso da questa cosa curiosa che conosciamo come «adesso»; ragionando nello stesso modo, altrettanto si può dire dello spazio. La posizione di qualunque oggetto in movimento è denotata, e differenziata dalle altre, dal suo punto di «adesso» nello spazio. Il che non esclude l'idea che possano esserci unità piccolissime di tempo o di spazio. Non c'è dubbio che Aristotele comprendesse che un intervallo può essere diviso indefinitamente, ma la sua concezione di infinito garantisce che noi possiamo sempre immaginare un «oltre»: un oltre potenziale per continuare la nostra divisione indefinitamente. La sua concezione dell'infinito prevede l'operazione mentale di continuare a dividere una retta o un intervallo di tempo ripetutamente e a piacere. Tali divisioni, però, sono pensate con riferimento ai numeri razionali, cioè ai numeri ottenibili come rapporto di due numeri interi: d'altra parte, le misure delle quali Aristotele poteva avere cognizione potevano essere soltanto razionali.

Aristotele utilizza questa infinità potenziale per sostenere che il paradosso della dicotomia enunciato da Zenone – quello per cui un oggetto in movimento deve superare ripetutamente una successione di punti mediani, prima di arrivare al punto di arrivo – è basato sul falso presupposto per cui sarebbe impossibile che una cosa assuma un numero infinito di posizioni in un arco di tempo finito. Di fatto, un oggetto in movimento dovrebbe «contare» una moltitudine infinita di numeri prima di arrivare alla fine del suo percorso.

I modelli della matematica moderna consentono di svolgere un numero infinito di operazioni in un tempo finito, attuando al contrario il paradosso della dicotomia. Un esempio in questo senso è dato dal famoso paradosso dell'albergo formulato da David Hilbert: da qualche parte nel paese delle meraviglie matematiche c'è un albergo il cui numero di stanze è infinito; le stanze sono numerate progressivamente con i numeri 1, 2, 3 e così via. L'albergo è sempre esaurito, eppure c'è sempre una stanza per un nuovo ospite. Infatti, il direttore dell'albergo sposta gli ospiti della stanza numero 1 alla stanza numero 2, quindi gli ospiti della stanza numero 2 alla stanza numero 3, e così via. In questo modo si libera la stanza numero 1 per il nuovo arrivato. Sembrerebbe un'operazione impossibile da farsi in un tempo finito, dal momento che gli occupanti devono spostarsi nello spazio reale e nel tempo reale. Ma se gli ospiti della stanza numero 1 impiegano mezz'ora per spostarsi, quelli della stanza numero 2 impiegano un quarto d'ora, e gli occupanti dell'n-ma stanza impiegano $1/2^{n}$ ore, allora questa moltitudine infinita di movimenti avrà termine esattamente entro un'ora.[3]

In ogni caso, Aristotele sostiene che Zenone, nell'affermare che è impossibile che una cosa occupi un numero infinito di posizioni in un lasso finito di tempo, partiva da un presupposto sbagliato. Aristotele mette in luce che il tempo e lo spazio sono egualmente divisibili illimitatamente e che perciò non dovrebbe esserci alcuna meraviglia se una persona passa attraverso un numero infinito di posizioni in una successione infinita di istanti. Ma in questa confutazione del paradosso della dicotomia c'è qualcosa di più. Aristotele afferma che dimezzando la distanza che deve essere coperta dall'oggetto in movimento, si ha un'interruzione del movimento. Infatti, il punto di mezzeria è considerato due volte: una volta alla fine del primo segmento, e ancora un'altra volta all'inizio del segmento successivo.

La moderna topologia – cioè la disciplina matematica che si occupa delle proprietà delle figure e delle forme indipendentemente dalle misure di distanza[4] – troverebbe quest'affermazione sconcertante, dal momento che essa presuppone che il punto di divisione si trovi su un segmento o sull'altro, ma non in entrambi. Comunque ecco il ragionamento di Aristotele: se il tempo è continuo e i punti del tempo sono rappresentabili come punti dello spazio, allora la posizione di un punto deve appartenere insieme al passato e al futuro. Dunque, secondo Aristotele, Zenone presuppone che se un oggetto di colore bianco assumesse un altro colore in un periodo di tempo diviso in due intervalli – nell'intervallo a, durante il quale è bianco e nell'intervallo b, durante il quale è non-bianco – allora ci dovrebbe essere un qualche istante C nel quale l'oggetto è insieme bianco e nonbianco; in altre parole, rimaniamo con la contraddizione, maledettamente imbarazzante, che C appartiene insieme ad a e a b.

Per Aristotele questa contraddizione si basa su qualcosa che egli ritiene falso, precisamente sulla nozione pitagorica che il tempo è dato da un allineamento di momenti atomici, ciascuno dei quali segue direttamente il precedente senza che niente sia interposto tra i due momenti. Questa consapevolezza della possibilità di un addensamento dei numeri è veramente significativa: i matematici arrivarono ad apprezzarla soltanto nel XVI secolo, con l'affermarsi del calcolo differenziale (o infinitesimale) che poggia sulla proprietà dell'insieme dei numeri razionali di essere denso nell'insieme dei numeri reali.

Aristotele argomenta che se qualcosa è in movimento in un certo istante, deve già essere stato in movimento, anche se eventualmente il movimento poteva essere più lento o più veloce. Se lo spazio e il tempo sono entrambi continui, se dunque non è necessario ipotizzare un allineamento di punti e di istanti, e se il tempo è puramente una scala numerica astratta del nostro intelletto che rappresenta il movimento, allora il tempo è una misura continua delle variazioni di posizione. Ne segue che non c'è alcuna variazione di posizione in un dato istante di tempo ma non per questo si dovrà concludere che non si ha, in assoluto, alcun cambiamento.

La sua definizione di «essere fermo» significa che da un istante a un altro istante completamente diverso l'oggetto in questione e tutte le sue parti occupano lo stesso spazio. Inoltre – sostiene Aristotele – il tempo è divisibile indefinitamente. Perciò, quando Zenone afferma che la sua freccia in volo «non si sposta» in un certo istante indivisibile, Aristotele concorda che la freccia e tutte le sue parti occupano lo stesso posto in quel preciso istante, ma questo non significa che la freccia sia ferma, perché, per esserlo, la freccia e tutte le sue parti dovrebbero occupare lo stesso spazio per un periodo continuato di tempo. In altre parole, tutto ciò che è in movimento cambia posizione via via che il tempo avanza con continuità e quel che avviene in un singolo istante non è rilevante.

Bisogna dire che Zenone aveva anticipato le obiezioni che sarebbero state mosse ai suoi quattro paradossi, congegnandoli abilmente in modo da mettere gli oppositori con le spalle al muro, stretti nell'imbarazzo di assumere la divisibilità o l'indivisibilità del tempo e dello spazio. Infatti, i primi due paradossi (quello della dicotomia e quello di Achille) ipotizzano che lo spazio e il tempo siano divisibili indefinitamente, mentre gli altri due (quello della freccia e quello dello stadio) muovono dall'ipotesi contraria.

Per confutare il paradosso di Achille, Aristotele lo riduce a quello della dicotomia, osservando – correttamente – che anche il paradosso di Achille comporta una sorta di divisione dello spazio, in questo caso non in due metà uguali (come richiede il paradosso della dicotomia), ma secondo la proporzione delle velocità dei corridori. Osserva inoltre, anche qui correttamente, che Zenone ci inganna nel focalizzare la nostra attenzione sui momenti che precedono il superamento della tartaruga da parte di Achille, proponendo l'argomento come una questione di semplice raggiungimento. Sì, Achille non supera la tartaruga quando la tartaruga è davanti, ma tendiamo a dimenticare che la corsa continua fino al traguardo, il quale può essere o può non essere oltre il punto in cui Achille supera la tartaruga.

Il quarto paradosso (quello dello stadio) ha l'aria di essere quello veramente difficile da confutare. In effetti, un suo corollario è che tutte le velocità sono uguali, perché se il tempo e lo spazio sono costituiti da un allineamento, rispettivamente, di istanti atomici e di punti, allora un oggetto è costretto ad avanzare di un atomo di spazio nella durata di un atomo di tempo. Se non fosse questo il caso, allora l'oggetto dovrebbe procedere nella misura di un atomo di spazio in più (o meno) di un atomo di tempo, il che renderebbe l'atomo di tempo divisibile. Ma Aristotele sembra che abbia frainteso il nocciolo del problema, quando nella sua breve critica si limita ad attaccare l'ipotesi, affermando che «la fallacia del ragionamento è individuabile nell'assunto che un oggetto in movimento richiede lo stesso tempo per superare un altro oggetto di uguali dimensioni, indipendentemente dal fatto che il secondo oggetto sia in movimento oppure fermo; ma questo presupposto è falso».[5]

Tutti questi argomenti sembravano focalizzati sulla possibilità del movimento e sulla questione se il tempo e lo spazio siano o non siano continui. La causa del movimento era un'altra questione. Ma ecco Aristotele argomentare che ogni moto è causato da un agente esterno; evita però di affrontare la questione di come tale agente continua a esercitare il suo effetto quando non è più a contatto con il mobile: «Se una cosa è in moto, essa è, necessariamente, tenuta in moto da qualcosa»,[6] così affermava. Ma che cos'è quel qualcosa? La risposta di Aristotele è che si tratta o di qualcosa che è circoscritto all'oggetto in moto e che lo mantiene in moto, oppure si tratta di qualche altro agente motore a contatto con il mobile. Secondo questa sua concezione, il moto dev'essere iniziato da qualcosa che si trovava già in movimento e quel movimento continua soltanto per il contatto con qualcosa che continua a trainare o a spingere. Si ha dunque l'immagine di una successione infinita di agenti motori, ciascuno dei quali è trainato oppure spinto dal suo vicino. L'idea che un corpo in movimento prosegue nel suo movimento finché non sopravvenga una causa impediente avrebbe sovvertito la sua concezione di nesso causale. Aristotele non aveva la nostra nozione di inerzia, quella alla quale facciamo ricorso per spiegare il moto di un sasso che continua a muoversi dopo aver lasciato la mano che l'ha scagliato. È una nozione che si sarebbe affacciata alla ribalta scientifica soltanto mille anni dopo.

SECONDA PARTE

Presenza di Zenone nel Rinascimento

4. La velocità come quantità

Se nel 1265 ci fossimo rivolti a Tommaso d'Aquino – domenicano, teologo, filosofo, caposaldo della cultura medievale, dottore della Chiesa e santo – per domandargli «Qual è la causa del movimento?», la sua risposta sarebbe stata molto semplice. È probabile che si sarebbe limitato a rispondere: «Dio». Avremmo trovato san Tommaso nel Regno di Sicilia; la dominazione sveva volgeva al termine proprio allora: l'anno successivo gli angioini avrebbero occupato il Mezzogiorno d'Italia. Ce lo immaginiamo seduto in un luogo ameno, mentre contempla il cielo, di fronte a una collina tutta coltivata a vigne, a perdita d'occhio.

«Ragione e fede» avrebbe detto san Tommaso «non sono in contraddizione. Sono entrambe doni di Dio, che convergono per farci scoprire Dio e dimostrarcene l'esistenza.»

Una dozzina di anni più tardi la risposta dell'aquinate alla nostra ipotetica domanda fu ufficializzata in una bolla papale intesa a contrastare tutte le posizioni in contraddizione con l'insegnamento della Chiesa. Questa bolla dichiarava che Aristotele e gli arabi non erano attendibili e che la causa del moto era Dio. Da quel momento la Chiesa cominciò a non essere più al passo con i tempi. Le crociate sarebbero presto finite, quelle stesse crociate che avevano portato in Europa i tesori di sapienza maturati presso altre civiltà, come quella araba e persiana.

La crescita intellettuale dell'Europa era stata anestetizzata, per buoni mille anni, dalla fede cristiana e dai dogmi della Chiesa, sin da quando i visigoti si erano portati tumultuosamente fin sotto le mura di Costantinopoli, avevano fatto incursione in Grecia e messo a sacco Roma. Era il 392 d.C., l'anno successivo all'editto di Teodosio che dichiarava il paganesimo «crimine di alto tradimento contro lo Stato, da espiarsi unicamente con la morte del colpevole»,[1] quando ad Alessandria d'Egitto una torma di cristiani fanatici appiccò fuoco alla biblioteca del tempio pagano di Serapide (il Serapeo), nel quale erano conservati più di 300000 volumi di papiro; nelle vie di Alessandria furono assassinati molti studiosi del famoso Museo, compresa Ipazia, matematica e filosofa. Nel VII secolo, erano centinaia i monasteri che costellavano le strade e i porti della via romea che da Canterbury portava a Gerusalemme: era la via del pellegrinaggio santo, lungo la quale non mancavano posti di ristoro, alloggi e uffici di informazione turistica. Si ebbe un incremento del turismo e gli albergatori ebbero il loro guadagno. Chi non se la sentiva o non poteva andare a Gerusalemme, faceva solo una parte del viaggio, fermandosi a Roma; oppure andava a Santiago di Compostela o, più semplicemente, da Londra se ne andava al santuario di San Tommaso Becket, a Canterbury. Leggiamo nel prologo ai

Racconti di Canterbury di Chaucer:

> Quando aprile con le sue dolci piogge
> ha penetrato fino alla radice la siccità di marzo [...]
> la gente allora è presa dal desiderio di mettersi in pellegrinaggio
> e d'andare come palmieri[2] per contrade forestiere
> alla ricerca di lontani santuari variamente noti
> e fin dalle più remote parti d'ogni contea d'Inghilterra
> molti si recano specialmente a Canterbury
> a visitare quel santo martire benedetto
> che li ha soccorsi quand'erano malati.

Alcuni pellegrini abbandonavano per sempre le loro case per vagabondare da un luogo sacro a un altro. Avveniva anche che, ben riconoscibili per il loro cappello piatto e a larghe tese, fossero assaliti dai banditi e divenissero preda di malintenzionati.

Con il crollo dell'impero romano, si ebbe la fioritura del mondo islamico. Gli islamici conquistarono le terre che si affacciano alle sponde meridionali del Mediterraneo, dalla Siria alla Mesopotamia, alla Spagna, espandendosi ben oltre i limiti della civiltà romana, in Asia e in Africa. Gli arabi importarono dalla Cina e dall'India numerose invenzioni, progredirono nell'astronomia, introdussero la nozione dello zero sviluppata dai matematici indiani; perfezionarono inoltre la chimica dei metalli e inventarono l'albero di mezzana, quello più vicino a poppa, per accelerare il corso delle navi. La conquista di Gerusalemme ebbe particolare importanza per il mondo arabo: lì era morto Maometto, nel 632, mentre era in meditazione su una roccia, nel Monte del Tempio (che poi è lo stesso sito del Tempio di Salomone), e di lì sarebbe asceso in cielo.

Il 27 novembre 1095 papa Urbano II prendeva la parola davanti a una folla assiepata in un campo di grano a Clermont, Francia:[3] «Gerusalemme è l'ombelico del mondo» proclamò. «Una terra fertile più di ogni altra, una terra che è come un altro paradiso di delizie. Questa è la terra illuminata dalla discesa in terra del Redentore dell'umanità, questa la terra nobilitata dalla sua vita, consacrata dalla sua passione, riscattata dalla sua morte e sigillata dal suo sepolcro». Con un appello appassionato incitò la folla a prendere le armi contro i pagani. «Questa città regale, posta al centro del mondo» continuò «è adesso prigioniera dei suoi nemici, ed è schiava per opera di coloro che non conoscono Dio, serva delle cerimonie dei pagani. Questa città si aspetta la libertà, spera la libertà, chiede incessantemente che voi le veniate in soccorso. In particolare, chiede aiuto a voi, perché Dio a voi ha fatto l'onore della gloria in armi, a voi più che a ogni altra nazione. Affrontate dunque questo viaggio, per la remissione dei vostri peccati e con la certezza di una gloria indelebile nel regno dei cieli».[4] Alla fine delle crociate, i cimeli furono distribuiti nelle chiese e nei monasteri di tutta Europa. Fra questi c'erano sete, profumi, spezie; ma non mancavano i libri. Erano libri scritti in arabo, traduzioni e trascrizioni di papiri greci ed egizi sottratti alle biblioteche degli arabi.

Così avvenne che l'insegnamento di Aristotele non fu più confinato alla Grecia, all'Egitto e al bacino del Mediterraneo. Gli otto libri dei quali si compone la sua Fisica derivano dagli appunti per le lezioni compilati dallo Stagirita nel corso di molti anni di meditazione e conversazioni riguardo al movimento e al cambiamento. In Europa Aristotele era conosciuto per il suo contributo alla logica, ma questi lavori sulla fisica cominciarono a essere conosciuti soltanto adesso, in coincidenza con la nascita delle università europee.

All'Università di Parigi l'opera di Aristotele era bandita. Potevano leggerla soltanto i teologi, anche se molti erano quelli che la leggevano in privato. L'eresia era un delitto grave: chiunque fosse stato scoperto a leggere Aristotele senza la dovuta autorizzazione era considerato eretico e imprigionato a vita. Leggiamo in un decreto scritto nel 1210, in occasione del concilio provinciale di Sens, firmato dal vescovo di Parigi (Decreta magistri Petri Senonensis):[5]

> Sia il corpo di maestro Amalrico [Amaury de Bène] rimosso dal cimitero e gettato in terra sconsacrata, e sia lo stesso scomunicato da tutte le chiese dell'intera provincia. Bernardo, Guglielmo di Arria l'orefice, Stefano presbitero di Corbolio [Corbeil] vecchia, Stefano presbitero di Cella, Giovanni presbitero di Occines, maestro Guglielmo di Poitiers, Dudo presbitero, Domenico de Triangulo, Odo e Elinans chierici di San Clodoaldo [St. Cloud]: siano costoro degradati e consegnati al braccio secolare. Urrico presbitero di Lauriac e Pietro di San Clodoaldo, ora monaco a San Dionisio [St. Denis], Guarino presbitero di Corbolio e Stefano chierico siano degradati e imprigionati a vita.
> Che nessun libro di Aristotele sulla filosofia naturale né i suoi commentari siano letti a Parigi in pubblico o in privato: questo noi vietiamo sotto pena di scomunica.

Quando l'Università di Parigi fu chiusa nel 1229 a causa di una disputa tra l'Università e le autorità locali, l'Università di Tolosa, da poco costituita, colse l'occasione per attirare a sé gli studenti e i professori di Parigi. Furono distribuiti volantini nei quali si leggeva: «Coloro che desiderano indagare e approfondire i segreti della natura possono qui ascoltare le lezioni sui libri di Aristotele che sono state proibite a Parigi». La bolla papale che proibiva ogni tesi che contraddicesse l'insegnamento della Chiesa era venuta troppo tardi.

Nel 1262 Tommaso d'Aquino si trovava nella residenza pontificia di Orvieto. Il papa Urbano IV nutriva un vivo interesse per la filosofia e si compiaceva di circondarsi di studiosi e filosofi di talento. Fu lì che l'Aquinate incontrò Guglielmo di Moerbeke, il quale aveva tradotto parecchie opere di Aristotele dal greco in latino, corredandole di un suo commento. L'incontro di intellettuali di così gran vaglia ispirò la composizione di opere che rendessero Aristotele accessibile alla comunità scientifica europea. Così avvenne che l'Aquinate si accingesse a scrivere i suoi commentari su Aristotele. Anche se Aristotele era pagano, i commentari di san Tommaso trasformarono la Fisica dello Stagirita, per certi versi oscura, in una brillante spiegazione di ciò che Aristotele aveva in mente. In seguito, nel XX secolo, Vernon Bourke, studioso dell'Aquinate, si sarebbe spinto ad affermare: «[I commentari di san Tommaso] costituiscono una chiara presentazione di quel genere di cosmologia dalla quale presero le mosse uomini come Copernico, Galileo, Keplero e perfino Newton, nel porre le fondamenta dell'astronomia e della fisica moderne».[6]

Nel 1328, allorché Edoardo III salì sul trono d'Inghilterra, all'età di quindici anni, l'insegnamento universitario aveva messo radici a Oxford, Cambridge, Parigi, Tolosa, Padova e Napoli. I corsi di laurea e gli insegnanti erano soggetti all'approvazione di uno dei due papi: [7] era questo un controllo ereditato dal tempo in cui le università erano una corporazione dei professori e degli studenti delle cosiddette scuole cattedrali.

Ormai le opere di Aristotele erano permesse e anche alla moda. I commenti dell'Aquinate e le sue interpretazioni le avevano rese accettabili alla Chiesa. La Fisica di Aristotele era quanto di più sensato si potesse pensare e – anche se non comportava alcun riferimento o lode al Dio dei cristiani – sembrava che non interferisse con l'insegnamento della Chiesa. Dunque la fisica del XIV secolo era fondamentalmente aristotelica, con la sua descrizione del moto condizionato dal tempo, e con il suo modo di considerare la «velocità», rapportando una cosa più veloce a una meno veloce. Ma la misura della velocità come quantità derivata dallo spazio e dal tempo non c'è in Aristotele: per arrivare a questo concetto bisognerà aspettare il XIII secolo.

Il matematico del III secolo a.C. Autolico di Pitane aveva provato a definire la velocità uniforme di un oggetto trascurandone la materialità, non essenziale, e considerando l'oggetto stesso come un punto che copre distanze uguali in tempi uguali. Questa è una definizione puramente geometrica, ottenuta tramite la rappresentazione ideale per punti e linee.

«La velocità di un punto» affermava «è uniforme quando quel punto copre distanze lineari uguali in periodi di tempo uguali». Questo significa che se la velocità è uniforme, i rapporti delle distanze coperte dall'oggetto in movimento eguagliano i rapporti dei tempi impiegati a coprire quelle distanze.[8] Noi che viviamo nel XXI secolo interpretiamo quanto diceva pensando alla velocità come rapporto fra distanza e tempo. Non lo avrebbe probabilmente fatto un fisico medievale, abituato a seguire le indicazioni di autori greci come Autolico, il quale pensava che i rapporti potessero essere istituiti solo tra quantità omogenee: distanze rispetto a distanze e tempo rispetto a tempo.

Gerardo di Bruxelles fece un passo avanti verso la definizione della velocità come rapporto fra due quantità non omogenee quali la distanza e il tempo. Non sappiamo pressoché niente riguardo a Gerardo se non che egli è l'autore del primo trattato latino di cinematica, la disciplina che studia la dinamica del moto in relazione a posizione, velocità e accelerazione dei corpi, indipendentemente dalla loro massa e dalle forze agenti. Sappiamo inoltre che Gerardo diede un importante contributo nel riportare alla luce le opere matematiche di Euclide e Archimede. Abbiamo un frammento del suo Liber de motu (Libro sul movimento), ma non sappiamo neanche in quale secolo sia stato scritto. L'ipotesi più attendibile è che sia stato scritto tra il 1187 e il 1260.

Scrisse Gerardo: «Il rapporto tra i movimenti [cioè, tra le velocità] di un punto coincide con quello delle distanze descritte in tempi uguali». Si deve a questa breve frase il progresso decisivo compiuto dalla cinematica nel secolo successivo. Prima di questa affermazione di Gerardo, si assumeva comunemente che le velocità uniformi fossero relazioni di proporzionalità tra spazio e spazio, e tra tempo e tempo. In altre parole, si parlava del moto in termini di proporzioni che correlavano tra loro uno spazio con l'altro o un tempo con l'altro, ma mai si rapportava lo spazio al tempo. Gerardo invece confrontava le velocità mettendo in relazione le distanze attraversate in tempi uguali. A noi questo può sembrare terribilmente ingenuo, poiché siamo abituati a definire la velocità come rapporto tra spazio e tempo. Ma con Gerardo, per la prima volta, si ha a che fare con velocità considerate come grandezze: tale approccio imprime una svolta nella direzione del moderno concetto di velocità istantanea. Dunque vediamo in Gerardo un seme di sapienza fondamentale che però non sarebbe germinato prima di quattrocento anni, con lo sviluppo del calcolo differenziale, quando lo studio del moto venne impostato in maniera radicalmente diversa, facendo ricorso al concetto di infinito per modellizzare le variazioni che hanno luogo nel corso del tempo. L'intuizione di Gerardo fu un buon inizio, ma bisognava compiere un altro passo.

All’inizio del XIV secolo, le cause del moto non erano ancora ben comprese. Omne quod movetur ab alio movetur («Tutto ciò che si muove è posto in moto da qualcos’altro»): questo era il principio generalmente accettato. C’era però una nuova idea in incubazione, in un periodo che si colloca tra il 1328 e il 1350: ciò avveniva al Merton College, Oxford, di recente costituzione.

Come la maggior parte delle città medievali, Oxford nel 1328 era protetta da un muro di cinta. Percorrendo in direzione sudest l’acciottolato che si trova al di qua del muro di recinzione, verso Saint John Lane (oggi Merton Street), vi trovereste di fronte alla chiesa di San Giovanni Battista, a un paio di case padronali e a un edificio di tre piani costruito con pietra di Cotswold, un calcare di un colore giallo che a quel tempo cominciava a prendere la tonalità del miele. Il terzo piano è coperto da un tetto di pietra dalle falde spioventi, senza abbaini: qui si trovano il dormitorio degli studenti e, verso est, la biblioteca, là dove si innesta, ad angolo retto, un altro edificio. Al primo piano c’è un’aula molto grande, le cui finestre si affacciano a mezzogiorno su un prato inglese, senza arbusti o alberi. Questo prato sarebbe divenuto in seguito un quadrilatero, intorno al 1370, dopo la costruzione di due nuovi edifici: tale quadrilatero fu preso a modello per la costruzione di altri collegi, non solo a Oxford, ma anche nei collegi delle università di tutto il mondo occidentale.

Dunque in un tempo compreso tra il 1328 e il 1350 avvenne in questi edifici qualcosa di insolito. Quattro matematici del Merton College collaborarono per spiccare il primo passo decisivo per la misura dell’accelerazione.

Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead e John Dumbleton lavoravano su un’idea che avrebbe cambiato il mondo.[9] Bradwardine, conosciuto come «doctor profundus», era il più anziano del gruppo. Aveva appena terminato di scrivere il suo Tractatus de proportionibus velocitatum, dedicato ai problemi cinematici, che avrebbe avuto un’influenza notevole, ancorché imprevista, sugli sviluppi della matematica al Merton College. Nelle sue lezioni aveva toccato l’argomento delle cause del movimento, anche se non le conosceva con precisione, perlomeno prima che lasciasse il Merton College per trasferirsi presso la corte reale a Flanders. Poi divenne rettore della cattedrale di San Paolo a Londra e in seguito arcivescovo di Canterbury. Mantenne quest’incarico giusto un anno, prima di morire di peste.

Con la comparsa in Europa della polvere pirica e delle armi da fuoco, non sarebbe passato molto tempo prima che il cannone chiudesse l’epopea dei cavalieri in armatura e dei castelli fortificati. Il primo rombo di cannone si udì probabilmente proprio nel tempo in cui i quattro matematici del Merton College si scambiavano idee sulla meccanica del moto. Ma questi ultimi non spararono palle di cannone: piuttosto scoccarono frecce, come Zenone, al tempo in cui si cominciò a non far più uso delle frecce.

Per la prima volta nella storia della scienza, le cause e gli effetti del moto cominciavano a essere distinti, e a essere capiti. Iniziavano allora a emergere i concetti di velocità istantanea e di moto uniformemente accelerato che avrebbero costituito (300 anni più tardi) una delle principali motivazioni pratiche per la nascita del calcolo differenziale. Era questo il momento di una scoperta fortuita e imprevista (un caso di serendipità, come si tende a dire oggi), che metteva in relazione l’accelerazione con la distanza percorsa da un grave in caduta libera.

Fu Gerardo di Bruxelles a dare spunto ai trattati di Merton. Avvenne dunque che un certo giorno il matematico Heytesbury tenesse una delle sue lezioni sul moto.[10] Spiegava quel che sarebbe stato conosciuto come il teorema dell'accelerazione, un teorema che si applica a tutti gli oggetti in caduta libera, che si suppone siano accelerati uniformemente.[11] Si suppone cioè che al trascorrere del tempo, per ogni incremento fissato di tempo l'oggetto acquisisca un uguale incremento di velocità. In altre parole, l'oggetto alla fine del secondo incremento è due volte più veloce di quanto non fosse alla fine del primo incremento; è tre volte più veloce alla fine del terzo incremento (sempre rispetto alla velocità che aveva alla fine del primo incremento) e così via.

Accelerazione uniforme significa che la velocità aumenta a un tasso costante. Heytesbury pensò che, calcolando i tempi dall'istante in cui l'oggetto comincia a cadere, al termine di un certo intervallo di tempo lo spazio percorso deve essere uguale alla media della velocità finale e di quella iniziale, moltiplicata per il tempo trascorso. In formule, se s è la distanza coperta, t il tempo trascorso e v la velocità finale (quella iniziale è 0), si ha:

$$s = v_m \cdot t = \left(\frac{v+0}{2}\right) \cdot t$$

Heytesbury eseguì alcuni calcoli, riportati in tabella:

Tempo (secondi)	1	2	3	4
Velocità finale (piedi al secondo)	32	64	96	128
Distanza (piedi)	16	64	144	256

Se dopo due secondi di caduta libera la velocità del grave è, per esempio, di 64 piedi al secondo, allora la media delle velocità per quell'intervallo di tempo è uguale a (64 + 0) / 2 = 32 piedi/s, dunque al tempo t = 2 s il corpo avrà percorso (32 piedi/s) · 2 s = 64 piedi. Analogamente, dopo un secondo di caduta libera il grave avrà percorso (32/2 piedi/s) · 1 s = 16 piedi. Questo bastò a Heytesbury per notare che la distanza percorsa nel secondo intervallo unitario di tempo (da 1 s a 2 s) era tre volte la distanza percorsa nel primo intervallo unitario (da 0 a 1 s): 48 piedi nel secondo intervallo e 16 piedi nel primo, per un totale, appunto, di 64 piedi percorsi da 0 a 2 s.

Ragionando analogamente, Heytesbury trovò che dopo quattro secondi il grave in caduta libera aveva percorso una distanza di (128/2 piedi/s) · 4 s = 256 piedi e via dicendo. In base ai calcoli effettuati ipotizzò dunque che esistesse una regola generale: il grave che al tempo t si trova a una certa distanza dal punto iniziale, al tempo 2t si troverà a una distanza pari a quattro volte tanto.

Se questa ipotesi era corretta, Heytesbury si era imbattuto in qualcosa di veramente magnifico, dal momento che la regola si giustifica solamente ammettendo che la distanza percorsa sia proporzionale al quadrato del tempo di caduta. Le distanze raggiunte dal grave dopo 1, 2, 3, 4, ... secondi sono cioè date, nelle opportune unità di misura, dai quadrati 1, 4, 9, 16, ... (e l'incremento delle distanze coperte a ogni nuovo secondo progredisce come la successione dei numeri dispari: 1, 3, 5, 7, ...).

Misurando i tempi dall'istante in cui l'oggetto comincia a muoversi, la sua velocità finale è dunque due volte il rapporto fra spazio percorso e tempo impiegato:

$$v = 2\frac{s}{t} \quad \text{da cui:} \quad s = v_m \cdot t = \frac{1}{2} v \cdot t$$

La formula trovata per la velocità è notevole per due ragioni:

1) per la prima volta nella storia si può determinare un valore numerico per la velocità, stabilito in base alla conoscenza della distanza e del tempo;
2) si è dato un significato al rapporto fra quantità diverse, come lo spazio e il tempo.

Domandiamoci ora come cambia la formula della distanza nel caso in cui il tempo sia misurato a partire da un istante qualsiasi, quando il grave è già in caduta: in tal caso la sua velocità iniziale (al tempo t = 0), non nulla e diretta verso il basso, avrà un valore v_0 diverso da zero. Anche in questo caso la distanza percorsa sarà data dalla media delle velocità iniziale e finale, moltiplicata per il tempo trascorso:

$$s = v_m \cdot t = \frac{(v + v_0)}{2} \cdot t$$

Questa formula di Heytesbury è quella stessa alla quale perveniamo con altre considerazioni alla luce delle nostre conoscenze attuali. Infatti, noi moderni sappiamo che la velocità finale di un oggetto in caduta libera è:

$$v = v_0 + g \cdot t \quad \text{da cui si ricava:} \quad v - v_0 = g \cdot t$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Ponendo $g \cdot t$ al posto di $v - v_0$ nella formula di Heytesbury abbiamo:

$$s = \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t = \frac{1}{2}(v - v_0 + 2v_0) \cdot t = \frac{1}{2}(v - v_0) \cdot t + \frac{1}{2}(2v_0) \cdot t =$$
$$= \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

La formula di Heytesbury coincide dunque con quella alla quale gli studenti di fisica solitamente pervengono in base a considerazioni di calcolo infinitesimale.

Questa trattazione algebrica del moto offrì una via d'uscita superficiale alle difficoltà comportate dal paradosso di Zenone. Il ragionamento sarebbe questo: in generale, se la velocità di Achille è v_A, e quella della tartaruga è v_T, e la tartaruga ha un vantaggio h, allora al tempo t Achille si troverà alla distanza $v_A \cdot t$ e la tartaruga alla distanza $v_T \cdot t + h$. Per trovare il tempo in cui Achille raggiunge la tartaruga è allora sufficiente risolvere l’equazione ottenuta uguagliando le due distanze:

$$v_A \cdot t = v_T \cdot t + b$$

Si ottiene allora:

$$t = \frac{b}{v_A - v_T}$$

Vediamo che cosa ci dice questa formula: a) v_A deve essere maggiore di v_T, altrimenti si avrebbe un tempo negativo; b) se $v_A = v_T$, il denominatore è 0 e il modello matematico perde la sua validità; il modello presuppone che Achille alla fine raggiunga la tartaruga, consentendo al matematico di impostare un’equazione per cui la distanza raggiunta da Achille uguaglia quella raggiunta dalla tartaruga; c) il modello presuppone che esista un modo di determinare la velocità di ciascun corridore; d) il modello assume (proprio come fece Gerardo) che la velocità sia data dal rapporto fra distanza e tempo: la distanza può essere determinata conoscendo la velocità e il tempo trascorso.

Tuttavia il modo con cui si è usciti dalle strette del paradosso di Zenone è superficiale, dal momento che questo modello algebrico evita di prendere in considerazione la questione fondamentale, di impianto fenomenologico: cioè, come Achille supera la tartaruga.

5. Galileo Galilei, padre della scienza moderna

Una domenica mattina del 1583, il giovane Galileo Galilei passeggiava sull'acciottolato del Lungarno di Santa Maria della Spina: si recava al Duomo di Pisa per l'ufficio domenicale. Contemporaneamente i parrocchiani di altre contrade affollavano altre strade, richiamati dalle campane di altre chiese, più piccole, che facevano eco ai rintocchi provenienti dalla Torre pendente che sorge vicino al Duomo. Percorrendo l'argine dell'Arno, di fronte al magnifico Ponte a Mare del Brunelleschi, Galileo vedeva gli alberi dei pescherecci oscillare lentamente davanti a sé, sullo sfondo delle case di pietra, come metronomi, in concerto con il gorgoglio delle acque sotto il ponte e con lo scampanio che si udiva di lontano.

Galileo abitava presso un parente vicino a Porta Fiorentina. Di lì alla cattedrale non c'era molto da camminare, ma abbastanza perché uno studente d'intelletto fine prestasse attenzione al sincronismo tra i suoni e i movimenti della scena che aveva sotto gli occhi. Gli alberi delle barche con le loro bandiere sventolanti oscillavano al ritmo del rollio provocato dal moto ondoso. Osservava che il tempo impiegato dall'albero per compiere un ciclo di oscillazione non cambiava: è probabile che questa constatazione si sia insediata nel suo subconscio, in attesa di trovare un qualche nesso decisivo per abbozzare una scoperta scientifica.

Il Duomo di Pisa è una costruzione non molto elevata, abbastanza semplice nell'ornato, con una facciata che richiama lo stile della sua torre campanaria, la famosa Torre pendente di Pisa. Nella navata centrale è appeso un grande lampadario in bronzo, carico di decorazioni, con trenta candele poste simmetricamente tutt'intorno, in tre ordini: tre catenelle sospendono un piattino sotto ogni candela, per raccogliere le gocce di cera. Per accendere le candele occorreva calare giù questa poderosa struttura, poi nuovamente innalzarla, azionando la catena di sospensione che passava per il suo centro. L'operazione avveniva poco prima che la messa cominciasse, perciò tutta la struttura sospesa avrebbe oscillato per un po' di tempo, prima che le oscillazioni, smorzandosi, si limitassero a deboli tremolii, dovuti alle vibrazioni dell'organo della chiesa. La maggior parte dei fedeli probabilmente non ci faceva caso, ma un genio come Galileo osservava tutto questo, mentre nella chiesa risuonavano le parole monotone del sermone domenicale. Ma tant'è, la sua mente prendeva un'altra direzione. Ce l'immaginiamo mentre misura il periodo delle oscillazioni rapportandolo ai battiti del polso: è così, forse, che gli balenò l'idea di un nuovo modo di misurare il tempo: non più con il polso, ma con il pendolo. Questa perlomeno è la leggenda, che vuole che Galileo misurasse il periodo di oscillazione del lampadario mentre, seduto, assisteva un po' distratto a una noiosa messa nel Duomo di Pisa. Ammettendo che la storia sia vera, ecco il fenomeno meraviglioso da lui osservato: benché le oscillazioni del lampadario si smorzino, cioè gli archi di cerchio descritti dal moto pendolare si facciano sempre più piccoli, la durata di ciascuna oscillazione permane sempre la stessa. Le oscillazioni più corte durano semplicemente di più. Il tempo richiesto per compiere un ciclo completo di andata e ritorno dipende soltanto dalla lunghezza della catena di sospensione del lampadario.[1] Questo resoconto del modo in cui Galileo pervenne alla scoperta del cosiddetto isocronismo del pendolo è certamente frutto di fantasia, dal momento che – fra l'altro – il lampadario fu collocato nel Duomo soltanto nel 1588, cinque anni dopo l'annuncio della scoperta.

Vera o falsa che sia, la storia racconta un modo plausibile in cui la scoperta potrebbe essere venuta a galla. Galileo in realtà potrebbe avere avuto la stessa rivelazione osservando qualsiasi oggetto oscillante. Fu il matematico Vincenzo Viviani, suo discepolo e amico, che tramandò la leggenda affermando tra l'altro: «Avendo osservato la regolarità con cui senza possibilità di errore si compivano le oscillazioni di questa lampada, come pure quelle di altri oggetti sospesi, gli venne l'idea di costruire uno strumento, basato su questo principio, per misurare con gran precisione il ritmo del polso e le sue variazioni».[2] C'è chi dice che in seguito a questa osservazione fatta in Duomo, quella domenica mattina, Galileo prese la decisione di orientarsi agli studi di matematica; altri sostengono però che questa decisione maturò un giorno che ascoltò, casualmente, una lezione di matematica.

Nell'Italia del tardo XVI secolo i docenti erano ancora trincerati dietro la dottrina aristotelica, nella convinzione che gli antichi greci avessero già espresso tutto lo scibile umano degno di nota. Diffidavano perciò fortemente di ogni nuova idea che giungesse da menti creative. Era appena trascorso un secolo di impareggiabili esplorazioni, che avevano più che raddoppiato l'estensione del mondo conosciuto. Era stata scoperta l'America; Vasco da Gama aveva doppiato il Capo di Buona speranza per raggiungere l'India; Magellano aveva circumnavigato l'intero globo; era stato scoperto il vasto oceano Pacifico. Gli europei avevano messo piede sul continente antartico e non erano precipitati dal globo terrestre: una pietra lanciata per aria ritornava al suolo anche sull'altro emisfero del pianeta. Il mondo sarebbe stato ben presto unanimemente considerato sferico e non costituito solo da Europa, Asia, Africa e Terra Santa.

Per mille anni, gli studiosi erano rimasti seduti nell'ombra dei loro studioli, nelle biblioteche delle università o in monasteri appartati, dove cavillavano e facevano congetture riguardo alla forma del nostro pianeta, alla composizione delle sfere celesti o alle leggi di natura. Ma per circoscrivere una verità finalmente avvertibile dai nostri sensi ci volle il coraggio dei marinai portoghesi, spagnoli e italiani nell'affrontare i pericoli dei mari sconosciuti. Nessuno, da un certo punto in poi, ebbe animo di continuare a sostenere che il nostro piccolo pianeta si trova al centro dell'immensa volta stellata. La scoperta delle Americhe offrì una nuova consapevolezza del mondo. D'altra parte, dell'America non si fa parola nella Bibbia, in Tolomeo non se ne trova traccia, neanche nel De caelo di Aristotele e neppure nella Storia naturale di Plinio. Così, quando i conquistatori spagnoli fecero ritorno in Europa, carichi di ricchezze meravigliose che nessuno mai prima di allora aveva visto e delle quali niente era mai stato scritto, molti cominciarono a nutrire una straordinaria curiosità: fra l'altro, si domandarono come mai i classici, che si riteneva offrissero una soluzione a tutti problemi, non avessero mai speso una parola sull'esistenza di terre esotiche popolate da una flora e una fauna sconosciute. Gli esploratori portarono in Europa squisite varietà di frutta, verdure e noci, mai viste nel vecchio mondo: pomodori, mais, avocado, ananas, bacche saporite, nuove qualità di mirtilli, semi di girasole, anacardi. Importarono la cocciniglia, un colorante del più brillante e più intenso color carminio che si fosse mai visto, così prezioso da scatenare in seguito guerre e incoraggiare i pirati dell'Atlantico a prendere il mare, partendo dai loro covi nelle isole caraibiche fino al porto di Cadice.[3] Perciò nel XVI secolo molti studiosi, per quanto restii a mettersi in contrasto con la Bibbia, sfidarono tuttavia la saggezza dell'insegnamento classico allora egemone e cominciarono a indagare la natura mediante l'osservazione diretta.

L'invenzione della stampa a caratteri mobili – in legno o in piombo – per opera di Johann Gutenberg nel 1436 e la nuova tecnica di fabbricazione della carta mediante macerazione di stracci di lino e canapa fecero sì che nel XVI secolo si pubblicassero più libri di quanti avessero visto la luce nei 3500 anni precedenti, da che il primo scriba babilonese incise la prima tavoletta cuneiforme.

L'insegnamento era allora autoritario, incentrato perlopiù sulla memorizzazione acritica delle opere di Aristotele. Le materie d'insegnamento erano le sette arti liberali: grammatica, logica, retorica, aritmetica, geometria, musica e astronomia, anche se il grado di approfondimento dedicato a ciascuna materia dipendeva dalle autorità locali. Questo apprendimento mnemonico produceva un intorpidimento delle coscienze al punto che ben pochi osavano mettere in discussione l'autorità dei classici della scienza, in particolare quella delle dottrine inossidabili di Aristotele. Inoltre la matematica era completamente trascurata, a parte l'apprendimento mnemonico delle regole dell'aritmetica e della contabilità. «I nomi di Euclide e Archimede dicevano ben poco alle masse degli studenti che ogni giorno affollavano le aule dello Studio di Bologna, l'Università più antica, o quelle della più liberale, l'Università di Pisa, e perfino quelle dell'Università di Padova, la dotta.»[4]

Gli umanisti italiani, che si applicavano allo studio delle fonti del pensiero classico nell'intendimento di trovarvi una sapienza alternativa a quella dell'insegnamento teologico, guardarono all'invenzione dell'arte tipografica con una punta di diffidenza: «I libri a stampa avevano l'aria di un sostituto a buon mercato dei loro amati manoscritti. D'altra parte un allargamento del pubblico dei lettori non era neppure nei loro voti, perché avrebbe comportato l'inclusione di persone sprovviste di gusto. Il buon gusto, infatti, come pure lo stile, le buone maniere, il rigore filologico e l'aplomb erano considerati più importanti di ogni altro più concreto progresso del loro secolo».[5]

Ciò nonostante, le opere di Archimede – che erano state copiate in greco nel IX secolo e tradotte in latino nel XV – venivano adesso stampate e vendute in tutta Europa. Queste opere spinsero una nuova generazione di pensatori a riconsiderare autonomamente le antiche concezioni del moto e della matematica.

Il giovane Galileo seguiva le lezioni ordinarie di filosofia e medicina: l'insegnamento era rigido, impartito con metodo autoritario, diverso da quello al quale era stato abituato dal padre, che gli aveva dato i rudimenti dell'istruzione a casa, e dal quale aveva appreso a pesare ed esaminare i singoli argomenti, ragionando sul fondamento di verità di ciascuna proposizione, prima di accettarla. Galileo disprezzava l'insegnamento universitario che professava una verità basata sull'autorità e che considerava blasfemo ogni enunciato che fosse in contrasto con Aristotele.

I professori lo trovarono ostinato e poco collaborativo. Lui lesse, in segreto e senza guida di sorta, i primi sei libri di Euclide, arrivando a convincere il padre di essere in possesso di un raro talento matematico; dunque avrebbe fatto meglio a studiare matematica, piuttosto che insistere a voler diventare medico, professione più remunerativa. Saggia decisione, perché Galileo si applicò allo studio della matematica, fin dall'inizio, con grande passione e profitto, nella convinzione che grazie alla matematica avrebbe compreso i segreti più riposti della natura, e che avrebbe potuto trasformare le singole osservazioni del mondo naturale in principi universali sensati e pratici.

Parecchi anni più tardi, dopo che ebbe ricevuto il titolo di professore di matematica, cominciò a rendersi conto che lo studio del moto – lo stesso concetto di moto – aveva un ruolo centrale nella comprensione scientifica di tutti i fenomeni naturali. Approfondì questa intuizione leggendo un libro di speculazioni sulla fisica e la matematica, scritto da Giambattista Benedetti, nel quale si presentava una teoria elaborata due secoli prima da Giovanni Buridano all'Università di Parigi.

Denominata, appunto, la «fisica di Parigi», la «nuova» fisica partiva dal presupposto che l'aria non può essere la causa del moto, come affermava Aristotele, ma che piuttosto era lo stesso corpo in movimento che possedeva la causa: l'oggetto in movimento era animato da un «impeto». Anche se questa nuova teoria richiedeva che comunque si rispondesse alla domanda «Che cos'è l'impeto?», quest'idea stimolò Galileo e gli diede il coraggio di mettere da parte le idee di Aristotele sul movimento. Tuttavia non abbandonò i metodi empirici di Aristotele; si limitò a combinare i metodi di osservazione del mondo naturale con i ragionamenti matematici, così da offrire alla fisica una solida base matematica.

Scrisse nel 1590 nel suo trattato giovanile De motu: «Seguirò in questo trattato il metodo per cui ogni affermazione dipenda da quanto è stato affermato prima, senza mai assumere come verità, se possibile, ciò che abbia bisogno di esser provato. Questo metodo mi è stato insegnato dai miei maestri di matematica».[6]

Rifiutò i ragionamenti di Aristotele con uno stile che era chiaramente influenzato dalla lettura di Euclide e di Archimede. Nella stesura del trattato fece esattamente quanto si era proposto di fare: ciò che avrebbe affermato in un capitolo dipendeva da ciò che era stato presentato nel capitolo precedente. Per capire che cosa sia il movimento, il libro fa ricorso a due intuizioni brillanti che svolgono un ruolo centrale in tutta la trattazione. La prima consisteva nell'usare il principio di Archimede per confrontare le diverse velocità di caduta di oggetti di peso specifico maggiore o minore nello stesso mezzo. La seconda intuizione fu quella di ricorrere a considerazioni idrostatiche per confrontare il moto di caduta di pesi uguali in mezzi diversi (cioè, in fluidi diversi). Perciò Galileo presenta la sua definizione di «pesantezza» e «leggerezza» e comincia con l'ammettere che gli oggetti più pesanti si muovono più lentamente di quelli leggeri e che questo moto naturale è causato dalla «pesantezza» o dalla «leggerezza». In un passo successivo dimostra che oggetti che presentino la stessa «pesantezza» (cioè, diremmo noi oggi, la stessa densità) del mezzo in cui sono immersi non cadono né si portano alla superficie, e che i corpi che siano meno densi dell'acqua non possono essere sommersi completamente. Istituì un'analogia tra i corpi che si muovono naturalmente e i pesi di una bilancia a bracci uguali, arrivando a identificare la causa della velocità di caduta e determinando i rapporti fra le velocità di caduta di corpi diversi in uno stesso fluido, così dimostrando che tali rapporti sono diversi da quelli previsti dalla teoria di Aristotele. Tutte le affermazioni di Galileo sono presentate in termini fisici, perciò i corpi animati di moto naturale sono riportati al caso dei pesi di una bilancia.

Aristotele affermava che due corpi fatti dello stesso materiale cadrebbero a velocità diverse, proporzionali alle loro dimensioni: in altre parole, una sfera d'oro del diametro, diciamo, di un palmo, dovrebbe cadere più velocemente di una biglia d'oro del diametro di un pollice.

Scrisse in proposito Galileo: «Questa concezione è ridicola, e quanto sia ridicola è chiaro più della luce del sole». Sviluppò quindi alcune considerazioni decisive per inficiare il punto di vista di Aristotele. Tra gli esempi probanti, quello che più colpisce è un ragionamento di pura logica. Galileo immagina di far cadere dall'alto due oggetti dello stesso materiale e dello stesso peso, ma collegati da una corda sottile: in questo caso Aristotele sarebbe stato costretto a dire che i due corpi insieme dovrebbero cadere più velocemente di quanto non cada ciascun corpo da solo.

«L'errore di Aristotele ha forse bisogno di una dimostrazione più chiara? E chi, mi domando, non sarà disposto a riconoscere la verità, immediatamente, solo che si attenga ai fatti in modo semplice e naturale?» Galileo presenta la cosa così semplicemente e naturalmente che ci si domanda come sia stato possibile che ad Aristotele fosse sfuggito l'argomento di Galileo. Consideriamo il caso estremo nel quale un oggetto è mille volte più pesante di un altro. Galileo usava questi estremi per ridicolizzare i seguaci di Aristotele. Scrisse: «Certo, costoro avranno il loro da fare e suderanno molto prima che possano mostrare che la velocità del primo oggetto è mille volte superiore a quella del secondo».

Galileo si trovava sulla strada giusta per mettere in chiaro un punto di grande importanza: stava per scoprire una meravigliosa proprietà della natura, esprimibile in termini matematici, che gli avrebbe consentito di mettere a punto un geniale modello fisico. Stava per scoprire qualcosa di straordinario e in piena contraddizione con la vulgata aristotelica, e l'avrebbe fatto nella maniera più creativa. Affermava ancora Aristotele che la velocità di un corpo che cada liberamente in mezzi di diversa densità è proporzionale alla rarefazione dei mezzi stessi.[7] Scrisse Galileo: «Queste sono le parole di Aristotele, ma non c'è dubbio che siano il risultato di una falsa concezione».

In primo luogo bisogna chiarire che cosa Aristotele e Galileo intendevano per velocità di un corpo in libera caduta.[8] Galileo diceva che un corpo in caduta libera accelera, causando una variazione continua della velocità; qual è dunque la velocità del corpo in caduta libera da considerarsi? Possiamo ipotizzare che Aristotele e Galileo intendessero la velocità di caduta del corpo quando sia venuta meno l'accelerazione. Ciò avviene quando la spinta di Archimede e la forza di attrito, che sono dirette dal basso verso l'alto, bilanciano la forza di gravità, che è diretta dall'alto verso il basso.

«E perché la cosa sia ben chiara in tutti i suoi aspetti» continua Galileo «costruirò questa dimostrazione.» La dimostrazione di Galileo può essere parafrasata così: supponiamo che la rarefazione dell'acqua sia 4 e che quella dell'aria sia 16.[9] Consideriamo un corpo che non affonda nell'acqua, per esempio un pezzo di legno, e supponiamo che la sua velocità nell'aria sia 8.[10] Invece la sua velocità nell'acqua sarà zero, dal momento che il legno è inaffondabile. Ci dev'essere certamente un fluido, intermedio tra l'acqua e l'aria, per cui la velocità di caduta del legno è 1.[11] Chiamiamo questo fluido X. Dal momento che l'oggetto si muove nell'aria più velocemente che nell'acqua, la rarefazione di X deve essere inferiore a 16. Aristotele direbbe che il rapporto tra la rarefazione dei due fluidi deve eguagliare il rapporto tra le velocità. Ciò significa che possiamo stabilire la proporzione X : 16 = 1 : 8. Da X / 16 = 1 / 8 si ricava X = 2, cioè la rarefazione di x deve essere 2. Ma come può essere possibile che un pezzo di legno, che galleggia nell'acqua di rarefazione 4, affondi poi con velocità 1 in un fluido che è meno rarefatto dell'acqua?

Galileo fa una pausa: «C'è qualcuno che non riesca a vedere l'errore di questa concezione di Aristotele?», quindi prosegue nella sua spiegazione, per illustrarci quale sia il vero rapporto. «Considerate una quantità di ciascuno dei fluidi il cui volume sia uguale a quello dell'oggetto stesso, quindi sottraete il peso di questo volume di fluido da quello dell'oggetto, per tutti i fluidi che vorrete considerare. I risultati saranno tra loro in rapporto come le velocità del movimento». Questa è la soluzione del quesito: la velocità di caduta è proporzionale al peso relativo, e non alla rarefazione del mezzo. Se, per esempio, consideriamo l'alluminio, un centimetro cubo di alluminio pesa 2,6 g nell'aria ma solo 1,6 g nell'acqua. Nel calcolare i rapporti delle velocità di caduta di un oggetto in due diversi mezzi fluidi, Galileo ci dice che dobbiamo mettere in conto il peso dell'oggetto al netto del peso del volume di fluido spostato.[12]

Così Galileo mina alla base i princìpi della fisica aristotelica, uno dopo l'altro, arrivando anche a dimostrare nuovi princìpi. Ancora una volta fa una pausa e soggiunge: «Anche su questo argomento Aristotele, come praticamente in tutti gli argomenti riguardo al movimento, ha scritto il contrario della verità. E davvero non c'è di che meravigliarsi: perché com'è possibile che si pervenga a conclusioni vere partendo da presupposti falsi?».

Infine, Galileo affrontò la questione: «Da quale causa agente sono mossi i proiettili?». È una questione molto sottile, che rimase senza risposta sino a quando Isaac Newton ennunciò la sua legge d'inerzia, secondo la quale ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fintanto che, dalla risultante di forze impresse, non sia costretto a mutare quello stato. Il significato latino della parola «inerzia» è, in effetti, «inoperosità». Questa parola è utilizzata, appunto, per significare che l'inerzia è la causa per cui un oggetto continua passivamente a fare ciò che stava facendo. Perciò, in assenza di una forza netta risultante, un oggetto in moto manterrà la sua direzione di movimento e la sua velocità. Questa è dunque la risposta alla domanda che si pose Galileo: è l'inerzia ciò che fa sì che il proiettile perseveri nel suo stato di movimento. Può sembrare, questo, un modo di schivare il problema, affidando la risposta a una qualche forma di personificazione fenomenologica – l'inerzia, appunto – che l'oggetto assorbe e conserva finché non intervenga un evento esterno che la faccia cessare. Quelli fra noi che sono cresciuti avendo fiducia da sempre nel principio di inerzia non hanno difficoltà a dare una risposta al quesito di Galileo. A noi basta dire che è la natura, attraverso le sue leggi, che agisce sull'oggetto in moto.

La risposta di Aristotele era invece che una pietra scagliata in aria sposta le particelle dell'aria, una dopo l'altra; le particelle si mettono in moto e muovono in successione le particelle adiacenti. Quando la pietra ha lasciato la mano di colui che l'ha scagliata, si muove sulla scia di quelle particelle d'aria in movimento. Galileo scrisse che «ad Aristotele e aisuoi seguaci, i quali non potevano capacitarsi del fatto che un corpo possa essere posto in moto da una forza agente su di esso, o che non potevano arrivare a comprendere che cosa sia quella forza, non restava che cercare scampo in questa concezione». Quindi demolì la spiegazione di Aristotele, snocciolando parecchi esempi decisivi. Com'è che una freccia scagliata da un arco si muove così velocemente contro un vento turbinoso? I seguaci di Aristotele sarebbero stati costretti ad affermare che il vento soffia contro se stesso.

Obiettava Galileo: «Ma non si vergognano di uscirsene con queste trovate infantili?». Oppure si consideri una nave spinta a forza di remi contro la corrente del mare. Com'è che la nave procede anche quando i remi non sono più immersi? «Chi è così cieco da non vedere che, di fatto, l'acqua scorre con forza in verso contrario a quello della nave?», così diceva Galileo.

In un altro ragionamento Galileo ci chiede di pensare a una biglia di marmo perfettamente levigata, animata da moto di rotazione intorno a un asse passante per il suo centro. La biglia permane nel suo stato di rotazione, ma l'aria circostante non si sposta, per il semplice fatto che non c'è niente che possa imprimerle un moto.[13]

Ai fini del suo esempio più bello – tale lo considerava egli stesso – Galileo ci chiede di pensare a che cosa interviene tra il battacchio di una campana issata in cima a un campanile e la campana stessa, nel preciso istante in cui il battacchio colpisce la campana. Prima del colpo, il battacchio e la campana non dànno suono di sorta. Dopo il colpo, un suono intenso si propaga dalla campana, percepibile anche dopo che il battacchio si è ritirato, poi si smorza gradualmente. «Ma chi, sano di mente, direbbe che è l'aria che continua a colpire la campana? E se è l'aria che colpisce la campana ed è l'aria la causa del suono che di lì si propaga, com'è che la campana è muta anche quando soffia il più forte dei venti? È mai possibile che il vento di una libecciata che ingrossa il mare e abbatte le torri e i muri delle città possa colpire la campana con minor forza del battacchio, che si muove appena?» Galileo non dà una risposta esauriente a questa domanda ma si avvicina alla verità, al limite di ciò che sarebbe stato possibile al suo tempo. Si limita ad affermare che i proiettili sono mossi da una forza agente, e che questa forza è data dalla spinta impressa dal lanciatore.

Le dottrine aristoteliche del moto cominciarono a far acqua via via che un numero sempre maggiore di scienziati e filosofi della natura fondavano i loro giudizi su esperimenti eseguiti sul mondo reale piuttosto che su speculazioni astratte. Le incongruenze tra il mondo reale e il mondo astratto spuntavano a ogni piè sospinto, a ogni nuovo esperimento. E a ciascuna incongruenza si rispondeva, da parte del sapere tradizionale, con un rappezzamento di significato: «Sì, però in realtà Aristotele intendeva affermare...»; così dicevano i suoi sostenitori, ma poi veniva il momento in cui un attacco in forze della ragione costringeva questa assurda congerie di aggiustamenti ad assumere l'aspetto di un'arlecchinata di brandelli di affermazioni contraddittorie.

Spesso si accredita a Galileo il merito di aver ridimensionato l'affermazione di Aristotele secondo la quale nel moto di caduta libera (in particolare nell'aria o meglio, diremmo noi, nel vuoto) gli oggetti più pesanti sarebbero animati da una velocità maggiore. L'avrebbe dimostrato con un esperimento. Però abbiamo il resoconto di parecchi altri simili esperimenti, svolti prima che Galileo – come narra la leggenda – facesse cadere due oggetti di peso differente dalla Torre pendente di Pisa. C'è chi afferma che questo esperimento fu compiuto, da altri, già nel 1544. Un'altra fonte testimonia che il predecessore di Galileo sulla cattedra dell'Università di Padova l'aveva svolto l'esperimento nel 1576. La cosa più probabile è che Simone Stevino svolse questo stesso esperimento, nel 1586, non dalla Torre pendente di Pisa, ma da un'altra torre pendente, a qualche migliaio di chilometri da Pisa.

Delft era una piccola città ben provvista di mura, nell'Olanda meridionale. In un anno databile tra il 1325 e il 1350, vi si costruì un campanile, vicino alla piccola parrocchiale del XIII secolo. Terminata la costruzione, per la quale si era adottata la tecnica della muratura a secco, avvenne che la torre cominciasse a pendere considerevolmente in direzione nordest, proprio come la Torre di Pisa. Forse la pendenza si accrebbe dopo che fu installata una meravigliosa campana, del peso di nove tonnellate, quindici anni prima che Stevino salisse i gradini del campanile per svolgervi il suo esperimento. Le vibrazioni della campana erano così possenti che rischiavano di danneggiare la torre, perciò la campana rintoccava soltanto nelle occasioni solenni.

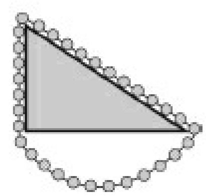
Issare una campana del peso di nove tonnellate in cima a una torre e montarla sul ceppo orizzontale di quercia destinato a sostenerla è un'impresa che sfida la nostra immaginazione. È possibile che Stevino si trovasse nei paraggi, quel giorno, e che abbia pensato alla meraviglia dell'impresa, rendendone merito ad Archimede, il suo eroe, che aveva sviluppato il concetto di «vantaggio meccanico» delle macchine di sollevamento pesi. Fu in seguito a quest'impresa, forse, che Stevino ebbe l'ispirazione di dedicarsi alla scienza meccanica e alla statica. Egli stesso avrebbe portato notevoli miglioramenti all'opera di Archimede. Spese un anno, il 1586, su un teorema riguardo a un certo triangolo delle forze: non sapeva che quel teorema avrebbe comportato una rivoluzione nel modo di considerare le forze e che avrebbe determinato una svolta nel progresso della statica.

Il teorema di Stevino trae forse origine da un rompicapo, abbastanza comune a quel tempo, riguardo a un esperimento ideale su una macchina di moto perpetuo: se ne discuteva parecchio tra gli studenti dell'Università di Leida, al tempo in cui Stevino vi frequentava le lezioni. Discusse il rompicapo con un suo buon amico, il giovane principe

Maurizio d'Orange, figlio di Guglielmo d'Orange, luogotenente d'Olanda per conto del re di Spagna Filippo II, poi assassinato allorché si mise a capo di una rivolta contro gli spagnoli.

Gli studenti a Leida avevano l'abitudine di riunirsi in uno scantinato vicino all'università per discutere quelli che essi chiamavano «esperimenti pensati», un mero esercizio intellettuale. Lo scantinato era una taverna fredda e umida, a causa dell'acqua che trasudava dalle fessure dei suoi massicci muri di pietra. In quell'ambiente senza finestre la luce, fioca, era fornita da candele poste sui tavoli e da torce a muro. Dalla distilleria di acquavite che si trovava accanto filtrava l'odore acre dei tini di fermentazione del mosto. La birra era a buon mercato. Stevino, Maurizio e gli altri amici avevano l'abitudine di prendere posto intorno a un lungo tavolo di quercia, incrostato dalla sedimentazione decennale di chiazze appiccicose di birra colata dai boccali tra un indovinello e l'altro. Alcuni di questi indovinelli erano di facile soluzione, ma quello che tornavano a discutere giorno dopo giorno – il mistero della catena in equilibrio – era davvero intrigante.

Ecco l'indovinello: c'è una catena o, se volete, una collana posta tutt'intorno a un prisma triangolare, in modo da formare un anello alquanto allentato. La sezione del prisma è un triangolo rettangolo i cui lati misurano, rispettivamente, 3 m (cateto verticale), 4 m (cateto orizzontale) e 5 m (ipotenusa).



Si assume che l'intero sistema sia esente da attrito.[14] Se la collana presenta una densità lineare uniforme di d libbre al metro, allora il peso che insiste sull'ipotenusa, che è lunga 5 m, sarà 5d, mentre il peso distribuito lungo il cateto verticale sarà 3d. Così stando le cose, il peso della collana che giace sull'ipotenusa della sezione del prisma (5d) è molto maggiore del peso distribuito lungo il cateto verticale (3d). Maurizio sosteneva che la collana avrebbe dovuto scorrere lungo l'ipotenusa, in virtù del fatto che qui insiste un tratto di collana di peso maggiore. Osservava inoltre che il tratto di collana sospeso sotto il cateto orizzontale non può contribuire al movimento, in una direzione o nell'altra, visto che la sua distribuzione è simmetrica. In ogni caso, se la collana cominciasse a scorrere lungo l'ipotenusa, dovrebbe continuare indefinitamente nel suo moto, dal momento che il movimento non cambia lo stato delle cose, non cambia cioè la distribuzione dei pesi lungo il cateto verticale e l'ipotenusa.

Stevino studiò questa strana situazione e arrivò alla conclusione che la faccia del prisma la cui giacitura è rappresentata dall'ipotenusa del triangolo rettangolo modifica la forza di gravità, causa del moto, in virtù della sua inclinazione. Infatti, la forza di gravità, che è verticale, viene divisa in due componenti:

– una componente cosiddetta tangenziale, avente la stessa direzione dell'ipotenusa;
– una componente cosiddetta normale, perpendicolare all'ipotenusa.

La seconda forza non ha effetto sul movimento della collana, perché normale a una superficie rigida, che non può essere penetrata; resta la componente tangenziale. In effetti, la sola forza che potrebbe produrre un moto è questa componente. Tale forza tangenziale è uguale a 3/5 del peso del tratto di collana adagiato sull'ipotenusa, come si può facilmente dedurre in base a considerazioni di similitudine fra triangoli. Dunque la componente tangenziale è uguale a $(3/5) \times 5d = 3d$, e questa è precisamente la forza verso il basso esercitata dai tre metri di collana distribuiti lungo il cateto verticale. Pertanto le due forze si equilibrano, cioè la collana si trova in equilibrio statico e non ha ragione di muoversi, neanche nella condizione ideale di assenza di attrito (tra la collana e la superficie del prisma).[15]

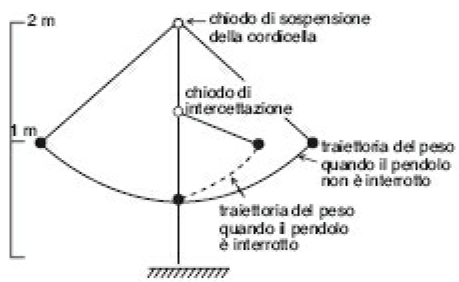
Scomponendo la forza in questo modo ingegnoso, Stevino introdusse il concetto di forza fittizia e pose le basi per l'applicazione del principio dei lavori virtuali al calcolo delle forze e degli spostamenti delle strutture. È un principio cardine della scienza delle costruzioni e della meccanica, da qualche secolo ai nostri giorni. La scomposizione della forza di gravità operata da Stevino costituisce una delle prime applicazioni dell'idealizzazione del pensiero geometrico platonico – con i suoi corpi ideali privi di attrito – al mondo reale della meccanica, il primo passo di un viaggio che avrebbe portato alla totale comprensione della meccanica del moto.

Stevino di fatto ruppe con il modo in cui erano stati concepiti tradizionalmente il peso, la forza e il moto, come se avessero un'esistenza materica, facendo entrare in campo la modellizzazione matematica con il suo seguito di interpretazioni platoniche ideali: in questa nuova meccanica si parla di punti, linee e spazio e le forze – che fino ad allora erano state considerate quantità numerabili – sono adesso assoggettate a un processo di geometrizzazione. Così si esprime James Newman riguardo alla geometrizzazione della meccanica, nel suo commento a Galileo:[16]

> I nomi di Platone e Pitagora tornarono trionfalmente ad additare la via. La moderna meccanica descrive molto bene il comportamento di corpi reali nel mondo reale; tuttavia i suoi princìpi e le sue leggi sono derivati da un mondo concettuale che non esiste, un mondo che è descritto nei termini di uno spazio euclideo puro, pulito, vuoto e sconfinato: uno spazio nel quale corpi geometrici perfetti descrivono, muovendosi, figure geometriche perfette.

Tutti dovrebbero leggere almeno un poco i Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze di Galileo, quanto basta per ricavare un'impressione indelebile del suo acume scientifico. Secondo la testimonianza dello stesso Galileo, questi discorsi contengono i risultati più importanti dei suoi studi sulla scienza dei materiali e sulla scienza del moto (sono queste le «due nuove scienze»). Il libro è scritto in forma di dialogo: i personaggi sono Salviati, Sagredo e Simplicio, che sviluppano la loro conversazione scientifica nel corso di quattro giornate. La terza giornata è dedicata al moto degli oggetti in caduta per effetto della forza di gravità. Attraverso un intreccio mirabile di affermazioni Galileo mette in bocca a Salviati, che è il suo alter ego, l'elegante dimostrazione di un fatto notevolissimo. Consideriamo due tavole inclinate – suggerisce Salviati – le quali presentino una superficie levigata e senza attrito, e la cui sommità si trovi alla stessa altezza; le due tavole però abbiano un'inclinazione diversa (dunque sono di lunghezza diversa). Si faccia quindi rotolare uno stesso oggetto sferico prima sull'una, poi sull'altra tavola. L'esperimento dimostra che quando l'oggetto sarà arrivato a fine corsa, al piede della tavola, la velocità sarà la stessa, indipendentemente dall'inclinazione della tavola. In altre parole, la velocità a fine corsa di un oggetto che rotoli su un piano inclinato dipende soltanto dalla differenza di quota tra il punto di partenza e il punto d'arrivo, mentre è indipendente dall'inclinazione. Questa è un'affermazione carica di significato che deve aver destato meraviglia in chiunque ragionasse – a quel tempo – sui problemi del moto.

Un'altra osservazione mise in luce come la conservazione dell'energia possa essere dimostrata per mezzo di un esperimento alla portata di tutti. Si prenda una cordicella, lunga – diciamo – un metro e mezzo e si fissi a un suo capo una sfera, per esempio, del peso di mezzo chilo. Si fissi l'altra estremità della cordicella a un chiodo sul muro: il chiodo si trovi, per esempio, all'altezza di due metri sopra il pavimento. A questo punto si prenda il peso e, tenendo ben tesa la cordicella, lo si sposti di lato in modo da portarlo a un'altezza di un metro sopra il pavimento. Quindi si rilasci il peso, che è libero di oscillare. Se prescindiamo dai fenomeni di attrito che inevitabilmente smorzeranno il moto oscillatorio, vedremo il peso andare avanti e indietro, raggiungendo sempre l'altezza di un metro sopra il pavimento. Adesso si infigga nella parete un secondo chiodo, sulla verticale passante per il primo, a un'altezza compresa fra un metro e un metro e mezzo sopra il pavimento. Quindi si torni a prendere il peso e, tenendo la cordicella ben tesa, lo si sposti di lato finché – anche in questo caso – non si trova a un'altezza di un metro sopra il pavimento. Si rilasci il peso: quando la cordicella si sarà portata sulla verticale e avrà incontrato il secondo chiodo, osserveremo che l'oscillazione del pendolo si interrompe, certo: tuttavia il peso posto all'estremità della funicella si solleverà comunque alla stessa altezza di un metro, come se il secondo chiodo non ci fosse stato.



Sempre nei suoi Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze Galileo trattò il tema del moto uniformemente accelerato considerandolo per quello che è, nella sua essenzialità. Infatti, «non c'è una sola persona che sia disposta a credere che l'atto del nuotare o del volare possa essere compiuto in maniera più semplice e più facile di quella che è adottata istintivamente dai pesci e dagli uccelli». La natura è semplice. Anche un grave in caduta libera da una posizione di riposo deve cadere in modo estremamente semplice. «Se dunque esaminiamo la questione accuratamente» diceva «troviamo, a proposito dell'incremento di velocità del grave, che non c'è un incremento più semplice di quello che ripete se stesso sempre nel medesimo modo».

Osservazione davvero straordinaria. Galileo non soltanto aveva capito la verità riguardo al moto dei corpi in caduta libera, ma aveva anche messo a punto un metodo moderno di indagine: ci presenta una ricerca che ricorre allo strumento dell'analogia.

Sapeva che un oggetto in moto a velocità uniforme percorre spazi uguali in tempi uguali. A partire da questa conoscenza e da una fiducia pitagorica nell'importanza della ripetizione di schemi ordinati ai fini dell'armonia dell'Universo, gli fu possibile dimostrare – grazie anche a una straordinaria intuizione – che un oggetto in caduta libera animato plausibilmente di moto uniformemente accelerato, dovrebbe acquistare incrementi di velocità uguali in tempi uguali. In altre parole, se un oggetto in caduta libera alla fine del primo secondo presenta, come abbiamo visto nel capitolo precedente, una velocità di 32 piedi/s, allora la velocità alla fine di ciascuno dei successivi secondi deve aumentare con incrementi di 32 piedi/s. Cioè, per t = 1 s la velocità è di 32 piedi/s; per t = 2 s la velocità è di 64 piedi/s; per t = 3 s, è di 96 piedi/s ecc.

Salviati arriva appunto alla conclusione che, computando i tempi a partire dall'istante in cui spicca il suo moto, un oggetto in caduta libera acquisisce uguali incrementi di velocità in tempi uguali. Ma questa è semplicemente parte della definizione di accelerazione uniforme, quella cui è soggetto un corpo in caduta libera.

Ancora nei Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze Galileo segue un meraviglioso argomento di conversazione introdotto da Sagredo, argomento che ricorda da vicino i paradossi di Zenone. Sagredo osserva che c'è qualche strana contraddizione nel pensare che un corpo possa guadagnare velocità crescenti con il trascorrere del tempo. Proviamo a misurare a ritroso il tempo in intervalli scanditi dal battito del polso. Supponiamo che alla fine del quarto battito (t = 4) il corpo abbia raggiunto una velocità pari a 2. Perciò alla fine del secondo battito (t = 2) il corpo ha raggiunto una velocità pari a 1. Poiché il tempo è divisibile illimitatamente, le velocità, andando indietro nel tempo, sono sempre inferiori. Continuando a ritroso nel tempo e avvicinandoci all'istante in cui il corpo ha cominciato il suo moto di caduta, osserviamo che il corpo deve aver cominciato a muoversi così lentamente da non essersi mai mosso. Ma ecco le parole di Sagredo, come ce le presenta Galileo nel suo meraviglioso italiano nella terza giornata dei suoi Discorsi:

> Convien dire che ne gl'instanti del tempo più e più vicini al primo della sua mossa dalla quiete [il mobile grave] si trovasse così tardo, che non arebbe (seguitando di muoversi con tal tardità) passato un miglio in un'ora, né in un giorno, né in un anno, né in mille, né passato anco un sol palmo in tempo maggiore; accidente al quale pare che assai mal agevolmente s'accomodi l'immaginazione, mentre che il senso ci mostra, un grave cadente venir subito con gran velocità.

Salviati fa presente a Sagredo che anch'egli, all'inizio, era rimasto perplesso all'idea che la velocità fosse proporzionale al tempo. Afferma quindi di aver verificato l'ipotesi con un esperimento. Eccolo: si procurò una sfera molto pesante, la pose su uno strato di materia cedevole (noi oggi possiamo pensare a uno strato di gomma siliconica) e misurò di quanto cedesse il materiale. Quindi sollevò la sfera a una certa altezza e la fece cadere sullo strato di materiale cedevole e anche in questo caso misurò di quanto il materiale si fosse affossato. Continuò a ripetere l'esperimento facendo cadere la sfera da un'altezza sempre maggiore: verificò che l'impronta lasciata dal grave si faceva sempre più profonda, via via che aumentava l'altezza di caduta. Di qui pervenne alla conclusione che la velocità della sfera aumenta veramente in corso di caduta.

In un altro esperimento, Salviati prese una tavola di legno e vi incise una canaletta ben diritta, che poi levigò e rivestì con un sottile strato di cartapecora. Quindi dispose la tavola in posizione inclinata, prese una biglia di bronzo ben levigata e la fece scorrere giù per la canaletta, cominciando dal punto in sommità della tavola. Misurò il tempo di discesa. Per essere sicuro dell'attendibilità delle misure ripeté l'operazione parecchie volte, quindi calcolò la media dei tempi misurati cosicché la misura del tempo era abbastanza precisa, tale che la deviazione fra due osservazioni non superava mai un decimo del battito del polso. Quindi compì un nuovo ciclo di misure, facendo rotolare la sfera da una quota inferiore, un quarto di quella precedente (senza cambiare l'inclinazione della tavola): trovò che il tempo di discesa era la metà di quello determinato precedentemente. Ripeté l'esperimento centinaia di volte, trovando sempre che le distanze percorse erano proporzionali ai quadrati del tempo di discesa. Quindi Salviati fece un nuovo ciclo di esperimenti con la tavoletta disposta a inclinazioni diverse, trovando ancora conferma della regola stabilita in precedenza: risultava che l'altezza di caduta era sempre in proporzione con il quadrato dei tempi.

Galileo sapeva che se il piano fosse stato orizzontale (invece che inclinato) e senza attriti, la biglia animata da una certa velocità, in assenza di una forza propulsiva, avrebbe continuato a muoversi indefinitamente conservando la sua velocità iniziale, cioè il moto sarebbe stato uniforme e non più accelerato. A conclusione di queste considerazioni Galileo introduce nella quarta giornata dei suoi Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze il seguente importante teorema, che riportiamo nelle sue precise parole (quarta giornata):

> Se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra di loro in duplicata proporzione dei tempi [in un rapporto pari al rapporto dei tempi moltiplicato per se stesso], cioè stanno tra di loro come i quadrati dei tempi.

In altre parole, se il grave in caduta libera è sceso di x metri allo scoccare del primo secondo (t = 1 s), al termine del secondo successivo (t = 2 s) sarà sceso di 4x metri, al termine del terzo secondo (t = 3 s) sarà sceso di 9x metri ecc. Dunque al termine dell'n-esimo secondo (t = n s) sarà sceso di n^2x metri. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, gli incrementi di distanza percorsa in ciascun secondo saranno fra loro in rapporto come la successione dei numeri dispari: 1, 3, 5, 7, ... Cioè il corpo in caduta libera si abbassa di x metri durante il primo secondo; quindi nel secondo intervallo di tempo, sempre della durata di un secondo, scende ancora di 3x metri; nel terzo intervallo di tempo scende di altri 5x metri ecc. È una scoperta che avrebbe elettrizzato Pitagora, perché conferma inequivocabilmente che i numeri costituiscono la chiave di comprensione della natura e che l'Universo risponde a un ordine razionale.

In altre parole ancora: il moto di un grave in caduta è, come abbiamo visto, uniformemente accelerato. Questo significa che:

– per quanto riguarda la velocità, nell'nesimo secondo essa sarà n volte superiore rispetto a quella registrata subito dopo il primo secondo: cioè dopo 2 secondi il corpo sarà 2 volte più veloce di quanto non fosse allo scoccare del primo secondo; sarà 3 volte più veloce dopo 3 secondi ecc.
– per quanto riguarda la distanza, nell'nesimo secondo essa sarà n^2 volte superiore rispetto a quella registrata dopo il primo secondo: cioè, per esempio, dopo 2 secondi il

corpo sarà 4 volte più distante dalla posizione iniziale di quanto non fosse allo scoccare del primo secondo. Si noti che qui non si dice di quanto debba cadere il corpo, si dice soltanto che se cade di x metri in t secondi, cadrà di 4x metri in 2t secondi.

Ma questo è precisamente ciò che affermavano, duecentocinquanta anni prima, William Heytesbury e i matematici del Merton College. Certo, Galileo doveva essere al corrente del teorema dell'accelerazione al quale erano pervenuti i matematici del Merton College, teorema che fu poi dimostrato da Nicola Oresme a metà del XIV secolo. Tuttavia non se ne trova menzione nei suoi scritti. Ma il contributo scientifico di Galileo è nel suo modo brillante di congegnare la sperimentazione. Gli strumenti per la misurazione del tempo erano allora troppo rudimentali perché potessero essere utilizzati per misurare la velocità dei corpi in libera caduta con la precisione di un secondo. Le misure potevano essere sbagliate anche del cinquanta percento.

Invece, sperimentando la caduta dei gravi su un piano inclinato, con una inclinazione non troppo ripida, si poteva procedere a una misura del tempo ragionevolmente accurata. Infatti, Galileo sperimentò la caduta dei gravi su un piano inclinato, la cui funzione era, appunto, quella di demoltiplicare la velocità di rotolamento della biglia di bronzo. Allo scoccare del primo secondo, allorché la biglia si è spostata di 60 centimetri, la sua velocità è di 1,2 metri al secondo. Nell'ipotesi che il moto sia uniformemente accelerato, ciò significa che:

– dopo due secondi la velocità della biglia sarà di 2,4 m/s;
– dopo tre secondi la velocità sarà di 3,6 m/s;
– ecc.

Ora, questo è il passo decisivo: la velocità è in aumento, ma è un aumento costante, il che significa che la sfera che ha cominciato a rotolare si troverà, alla fine di un qualsiasi intervallo di tempo t, a una distanza che è pari alla velocità media moltiplicata per il valore di quell'intervallo, cioè moltiplicata per t. Questo è, fra l'altro, quanto afferma il principio di Heytesbury considerato nel capitolo precedente. Con gli stessi dati esposti in precedenza si avrebbe perciò, per t = 2 s, che la biglia ha coperto una distanza pari a:

$$\frac{1}{2} \cdot (2{,}4\,\mathrm{m/s}) \cdot 2\mathrm{s} = 2{,}4\,\mathrm{m}$$

A questo punto Galileo trae le sue conclusioni affermando una meravigliosa legge di natura: se nel rotolare lungo il piano inclinato, in un tempo t (calcolato dall'istante in cui comincia a muoversi) la biglia avanza di una distanza x, in un tempo doppio (2t) la distanza coperta sarà quattro volte maggiore, 4x. La cosa è del tutto ragionevole, se si considera che «accelerazione uniforme» significa aumento costante della velocità. È proprio quello che avviene. Dal momento che la velocità aumenta costantemente, la velocità media nell'arco di tempo di due secondi dev'essere di valore doppio rispetto alla velocità media nell'intervallo che va da zero al primo secondo. Il ragionamento procede come segue:

– Galileo considera un intervallo di tempo t, e calcola la velocità media nell'intervallo 0-t.
– Sa che la velocità media nell'intervallo di tempo 0-2t deve essere doppia rispetto a quella dell'intervallo di tempo 0-t.
– In base alla legge ipotizzata, cioè applicando implicitamente il principio di Heytesbury che abbiamo visto nel capitolo precedente, sa che la distanza percorsa alla fine del tempo 2t può essere calcolata moltiplicando la velocità media nell'intervallo 0-2t, che è il doppio della velocità media nell'intervallo 0-t, per il doppio del tempo t. Dunque, raddoppiando il tempo, la biglia rotola a una distanza che è 4 volte maggiore. Con questo ragionamento arriva a calcolare che le distanze raggiunte in 1, 2, 3, 4, ... secondi progrediscono secondo i quadrati di questa successione, cioè secondo 1, 4, 9, 16, ...
– Galileo confronta i dati sperimentali, cioè i tempi e le distanze misurati, con quelli calcolati e ha conferma della correttezza della legge di natura ipotizzata.

Molto prima che Galileo facesse i suoi esperimenti sulla caduta dei gravi, precisamente 2100 anni prima, i pitagorici avevano misticamente stabilito che «il numero è la sostanza delle cose». Galileo aveva dimostrato che le regolarità matematiche si identificano perfettamente con la natura e che a loro volta possono essere generalizzate e utilizzate per governarla, in qualche modo, dal momento che siamo in grado di prevederne gli sviluppi. Come i pitagorici avevano osservato che i quadrati presentano fra loro una particolare relazione, quando siano costruiti sui lati di un triangolo rettangolo, così Galileo e i suoi contemporanei, ragionando sugli esperimenti eseguiti sui gravi in caduta libera, si imbatterono in una legge quadratica. La conclusione era che, forse, le misure di superficie e la geometria dello spazio hanno qualcosa a che fare con il moto.

6. Evoluzioni planetarie

Il mondo, e specialmente la Chiesa, aveva accettato il modello geocentrico dell'Universo formulato dal grande astronomo Claudio Tolomeo fin dal II secolo d.C. La teoria di Tolomeo si basava su secoli di osservazioni astronomiche e su una semplice geometria, fatta di cerchi in movimento fra loro. Tra l'altro, la dottrina tolemaica confermava quanto si trova scritto nella Bibbia a proposito di Giosuè che pronuncia le parole «Fermati, o Sole!», e si accordava perfettamente con la Genesi: la Chiesa era dunque ben contenta di schierarsi a favore di questo modello, con tutto il peso della sua autorità. Ma via via che si accumulavano nuove osservazioni e che l'ambito delle conoscenze si allargava, il modello tolemaico, per adattarsi ai nuovi dati disponibili, dovette subire sempre nuovi aggiustamenti e correzioni sempre più complicate.

Da principio, perché il modello tolemaico si adattasse alle nuove osservazioni dei moti planetari, fu sufficiente aggiungere pochi nuovi cicli (i cosiddetti «epicicli»): le osservazioni fatte dalla Terra – che si supponeva ferma al centro dell'Universo, ma che di fatto si muoveva – mostravano, infatti, che talvolta i pianeti deviano dal moto circolare perfetto per compiere piccole evoluzioni cicliche, dopodiché proseguono nella loro orbita. Quando si scoprì che anche Marte presenta periodicamente alcuni tratti di moto retrogrado, fu necessaria l'aggiunta di ancora nuovi epicicli.[1] Questo moto retrogrado avrebbe dovuto essere considerato un'anomalia in un Universo perfetto caratterizzato dal moto circolare, tanto più che la Terra si trova al suo centro, e che intorno a questo avrebbero dovuto orbitare i pianeti e il Sole, sempre nello stesso senso. Eppure le osservazioni non lasciavano dubbi di sorta. Marte, infatti, rallentava, si fermava, invertiva la direzione del moto, si fermava ancora e, dopo una seconda inversione di marcia, proseguiva nella sua orbita. Dopo 1300 anni di sempre nuove correzioni apportate al modello tolemaico, che diventava sempre più complicato, un piccolo gruppo di astronomi avvertì la necessità di riconsiderare tutta la teoria.

Nicolò Copernico nacque il 19 febbraio 1473 in Polonia, a Turonia (Torún), una pittoresca cittadina medievale circondata da mura, adagiata lungo le sponde della Vistola. Morì nel 1543, l'anno di pubblicazione della sua opera memorabile, De revolutionibus orbium coelestium («Sulle rivoluzioni dei mondi celesti»). Nel secolo precedente un'opera monumentale come il De revolutionibus difficilmente avrebbe destato l'attenzione di chi vivesse a più di mille chilometri da Cracovia, ma l'arte della stampa fu come una bretella di raccordo – non importa se malandata e polverosa – che veicolò le nuove idee su un’arteria di grande comunicazione. È vero che pochi astronomi erano in grado di leggere l’opera di Copernico in tredici volumi, ma il punto è che adesso era accessibile agli esperti e che il suo concetto fondamentale e rivoluzionario era sotto gli occhi di tutti: al centro del sistema planetario c’è il Sole, e la Terra è soltanto un pianeta come gli altri, in rotazione intorno al Sole. Non era un concetto nuovo, ma Copernico lo rivitalizzò con un apparato dimostrativo puramente matematico. Questa concezione eliocentrica formulata da Copernico era stata considerata, all’inizio, solo un’ipotesi ingegnosa, frutto dell’immaginazione. Come ogni fantasia, non le si fece caso e perciò non fu nemmeno ritenuta blasfema. D’altra parte, che cosa poteva fare la Chiesa? Quando la teoria copernicana cominciò a essere considerata seriamente, il suo autore era morto.

Il modello copernicano era semplice: si metta il Sole al centro dell’Universo, si assuma che la Terra e i pianeti orbitino circolarmente intorno al Sole; il resto segue in base a considerazioni matematiche. Per spiegare i movimenti erano necessarie poche ipotesi, e tutta la teoria copernicana risultava, sotto il profilo matematico, più semplice di quella tolemaica. Ma ci voleva ben altro che una maggiore semplicità delle ipotesi iniziali e una maggiore agilità matematica per convincere coloro che erano cresciuti nella convinzione che la Terra sia immobile.

Tycho Brahe non aderì completamente al modello copernicano: aveva l’impressione che qualcosa non si adattasse ai fatti osservati. Quando aveva diciassette anni e frequentava l’Università di Lipsia, aveva osservato una congiunzione di Saturno e Giove che, secondo entrambe le teorie, quella tolemaica e quella copernicana, avrebbe dovuto manifestarsi in una diversa data. La previsione del modello tolemaico era molto più grossolana di quella del modello copernicano, ma tanto bastava perché Brahe negasse la sua fiducia a entrambi. Perciò sviluppò una teoria tutta sua, secondo la quale il Sole e la Luna orbitano intorno a una Terra stazionaria, mentre gli altri pianeti ruotano intorno al Sole.

Brahe aveva una cura minuziosa dei mustacchi cespugliosi che gli scendevano giù dalla bocca, molto al di sotto delle guance: i quali però nulla toglievano all’importanza del suo naso posticcio in rame, in sostituzione del setto nasale che gli era stato mutilato nel corso di un duello, quand’era studente all’Università di Rostock, in Germania, sul Mar Baltico. La notte del dicembre 1566, quando incontrò a una festa di ballo Manderup Parsbjerg, anch’egli danese e studente a Rostock, Brahe aveva appena vent’anni. Brahe e Parsbjerg avevano bevuto parecchio quando l’argomento cadde su una certa giovane signora: argomento che, intrecciandosi con una comprensibile (per il XVI secolo) sensibilità per il punto d’onore, portò i due studenti a incrociare le armi in un bosco oscuro dietro l’Università. Il duello costò a Brahe il suo naso.

All’età relativamente giovane di ventisei anni, Brahe cominciò a costruire un osservatorio astronomico presso l’abbazia di Herrevad, vicino a Copenaghen. Il telescopio non era stato ancora inventato, pertanto l’osservazione avveniva necessariamente a occhio nudo. La sera dell’11 novembre 1572, uscendo dal laboratorio di alchimia nel quale era stato immerso per parecchie ore, Brahe notò un oggetto celeste di color bianco, molto luminoso, proprio di fronte a sé: una nuova stella, di intensità luminosa eccezionale, localizzata nella costellazione di Cassiopea, mai vista prima. Gli strumenti di cui disponeva erano sufficienti per stabilire che l’oggetto celeste non cambiava posizione sullo sfondo della volta stellata. Si continuò a vederlo per tutto il resto dell’anno, ma il colore andava cambiando, dal bianco al rosso, quindi al grigio. Brahe arrivò alla conclusione che l’oggetto luminoso doveva essere molto distante, molto più distante della Luna, della quale era possibile misurare gli spostamenti rispetto al firmamento. La cosa che più destò l’interesse di Brahe fu la novità della stella. Com’è che una stella può far apparizione d’improvviso, se il mondo celeste è veramente perfetto e immutevole, come professa la dottrina di Aristotele?

Ma era una stella? Per arrivare a una conclusione in questo senso Brahe costruì un dispositivo comprendente una bussola, con il quale misurò accuratamente la latitudine e la longitudine dell’oggetto luminoso, così da rilevarne ogni eventuale spostamento. Qualora gli strumenti avessero accertato un benché minimo spostamento dell’oggetto, ciò avrebbe significato che l’oggetto si trovava a una distanza paragonabile a quella della Luna e che non era una stella. Se l’oggetto non fosse stato una stella, ciò non sarebbe stato in contraddizione con la dottrina aristotelica che presuppone un cielo perfetto e immutevole, mentre gli oggetti vicini come la Luna sono per natura imperfetti, corruttibili e variabili. Ma se l’oggetto che Brahe vedeva era una stella, ebbene, questa sarebbe stata una sfida al concetto della purezza e immobilità celeste. Non si misurò alcun movimento, neanche piccolissimo: dunque l’oggetto luminoso era una stella.

Sappiamo oggi che Brahe aveva osservato una supernova: la nascita oppure la morte di una stella, in ogni caso una grande esplosione. Anche prima della scoperta di Brahe erano state osservate stelle di nuova formazione. Si dice che Ipparco ne avesse avvistata una nel II secolo dell’età volgare e che proprio per questo egli abbia tracciato la prima mappa della volta stellata, per potervi poi catalogare eventuali future stelle. Era anche avvenuto nel 1054 che una nuova stella di strabiliante intensità luminosa, più luminosa di Venere, facesse la sua apparizione nella costellazione del Toro. Era tanto luminosa che la si vedeva perfino di giorno.

La nuova stella individuata da Brahe, dopo aver fatto la sua apparizione improvvisa a nordest della costellazione di Cassiopea, più luminosa del più luminoso dei pianeti, ben presto scomparve per non essere mai più vista. C’erano state nel passato molte stelle variabili, ma nessuna aveva sollevato molta curiosità intorno all’immutabilità del cielo. In questo caso però si trattava di un’importante osservazione fatta dal più grande astronomo danese: ce n’era abbastanza per allentare le briglie di una fede assoluta nell’immutabilità del cielo, affermata con vigore da Aristotele, ma le cose non andarono così.

Cinque anni dopo che Brahe ebbe scoperto quella supernova, si produsse un altro evento inusitato. Brahe osservò una stella molto brillante con una coda rossa. Dopo averne seguito il moto e aver calcolato che si spostava in una regione ultralunare – a una distanza quattro volte superiore a quella della Luna – arrivò alla conclusione che l’oggetto con la coda rossa era fuor di ogni dubbio una cometa: ma non era una cometa sublunare, era una cometa ultralunare, che inficiava la perfezione celeste postulata da Aristotele.

Nei venti anni successivi, notte dopo notte – anche nel pieno dell’inverno, allorché per combattere il freddo si infilava in pesanti mantelli di lana, con il cappuccio calato in testa

– Brahe impiegò sistematicamente tutto il tempo a costruire strumenti che voleva sempre più precisi (ne inventò anche qualcuno di nuovo), e a catalogare le posizioni degli oggetti celesti conosciuti con una precisione sbalorditiva.

In seguito molti degli strumenti di Brahe furono trasportati dalla Danimarca in Boemia, a Praga, che allora era la capitale del Sacro romano impero: ciò avvenne all'alba del XVII secolo, quando fu nominato Matematico imperiale dall'imperatore Rodolfo II. Era ferma intenzione di Brahe dimostrare con la sua opera la verità del suo modello cosmologico, quello nel quale la Terra (insieme con la Luna tutt'intorno) si trova ferma al centro dell'Universo e il Sole ruota intorno alla Terra, mentre gli altri pianeti compiono il loro moto di rivoluzione intorno al Sole, essendo dunque trascinati dal Sole intorno alla Terra.

Desta oggi stupore il fatto che il modello copernicano dell'Universo fosse considerato a quel tempo poco più che una speculazione filosofica. Gli argomenti di Copernico, presentati in una cornice di grande semplicità geometrica, erano stati accantonati come una schematizzazione astratta, sprovvista di relazione con la realtà. Ma nel 1610, circa settanta anni dopo che Copernico aveva ereticamente suggerito che la Terra non fosse il centro del mondo, Galileo usava uno dei primi strumenti astronomici per osservare il moto dei pianeti.

Galileo diede la prima dimostrazione, ancorché informale, della teoria copernicana. Per questo fu invitato dal Tribunale della Santa inquisizione a recarsi a Roma per discolparsi: fu giudicato colpevole e condannato a vivere ritirato nella villa di Arcetri. Leggiamo oggi non senza stupore, nel prologo del suo Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo, scritto tra il 1624 e il 1630, quindi pubblicato nel 1632:[2]

> Si promulgò a gli anni passati in Roma un salutifero editto, che, per ovviare a' pericolosi scandoli dell'età presente, imponeva opportuno silenzio all'opinione Pittagorica della mobilità della Terra. Non mancò chi temerariamente asserì, quel decreto essere stato parto non di giudizioso esame, ma di passione troppo poco informata, e si udirono querele che consultori totalmente inesperti delle osservazioni astronomiche non dovevano con proibizione repentina tarpar l'ale a gl'intelletti speculativi.

All'inizio del XVII secolo fermentava in Boemia un complesso intreccio di aspirazioni di riforma religiosa e costituzionale. Per innescare quella guerra che si sarebbe propagata in tutta Europa e che sarebbe durata trent'anni bastò che un gruppo di rivoltosi protestanti defenestrasse dal Castello di Praga due governatori imperiali (e cattolici). Fino a quell'episodio, Praga era stata un grande centro europeo di cultura scientifica e alchimistica, meta di visite di studio da parte di scienziati provenienti da tutto il mondo.

Proprio lì, sulla sponda orientale della Mòldava, Giovanni Keplero, di recente nomina in qualità di Matematico imperiale, lavorava sui suoi modelli del sistema solare. Dopo anni di calcoli meticolosi basati sulle osservazioni registrate da Tycho Brahe, Keplero era sul punto di formulare le tre leggi che governano il moto dei pianeti. Desta meraviglia pensare che le tre leggi di Keplero siano state dedotte dalla sola osservazione del cielo. Lui non sapeva perché i fenomeni dovessero verificarsi proprio come venivano osservati, ma doveva avere la consapevolezza che i risultati dei suoi calcoli implicavano una armonia tra il mondo dei fenomeni osservabili e quello della pura razionalità matematica. Il suo lavoro era la rivelazione di un miracolo: un numero straordinario di fatti che si adatta a poche brevi proposizioni, sperimentalmente verificabili, riguardo alla relazione gloriosa tra spazio e tempo.

Per l’intelletto umano una disposizione perfettamente simmetrica risulta più naturale di una disposizione asimmetrica. Nessuna meraviglia dunque se Aristotele, proprio come i pitagorici prima di lui, immaginò che il moto circolare fosse l’unico movimento non rettilineo perfetto. Perciò quando pensò ai corpi celesti, non poté fare a meno di pensare che il loro moto dovesse svilupparsi lungo orbite perfettamente circolari. Quando un’idea come questa entra nella mente umana, vi s’impianta così profondamente da diventare poi difficile sradicarla, per far posto ad altre idee. Inoltre, al tempo in cui Keplero era giovane, erano in molti a credere che i pianeti fossero trasportati in tondo dagli angeli. Ora, gli angeli non erano un problema, il problema erano i circoli. Nello stesso tempo, fin da quando era molto giovane, Keplero aveva fiducia nella teoria copernicana secondo la quale la Terra ruota intorno al Sole. Perciò continuò a domandarsi quale fosse la relazione tra il diametro delle orbite dei pianeti e il tempo che essi impiegavano a compiere un ciclo di rivoluzione intorno al Sole. Sapeva che più un pianeta è lontano, meno appare veloce.

Ebbe un’idea ingegnosa, anche se destituita di fondamento. Si consideri un circolo, gli si inscriva un triangolo equilatero; quindi si inscriva in questo triangolo un secondo circolo. È facile verificare che il diametro del secondo circolo è la metà di quello del primo circolo. «Forse» così gli venne da pensare «questi circoli corrispondono alle orbite dei pianeti.» E se inscriviamo nel circolo un quadrato, invece che un triangolo? In questo caso il diametro del secondo circolo, quello inscritto al quadrato che a sua volta è stato inscritto nel primo circolo, risulta $1/\sqrt{2}$ più piccolo del diametro del primo circolo. Keplero ripeté il procedimento con un esagono e con altri poligoni, ma alla fine dovette abbandonare l’idea.

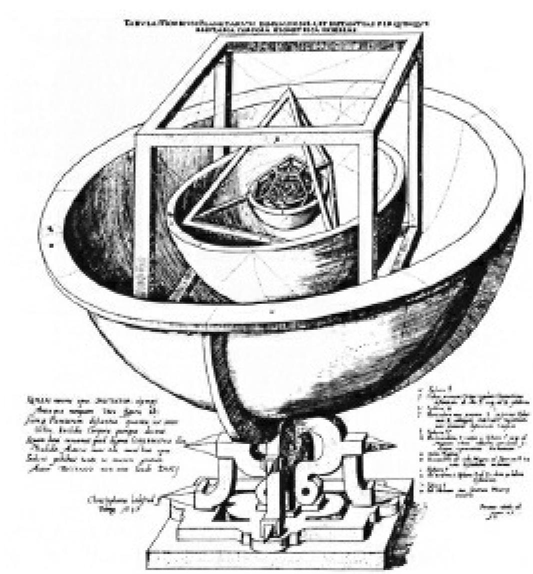
Naturalmente è un’idea di pura fantasia. Perché i pianeti dovrebbero comportarsi come poligoni inscritti in un circolo? È una domanda che pure deve essersi affacciata alla sua mente in qualche momento fugace, ma il fatto è che la vera preoccupazione di Keplero non era trovare perché i pianeti avessero un certo tipo di moto, ma come i pianeti si muovessero. La risposta, quale che essa fosse, doveva essere fortemente influenzata dall’idea galileiana che il mondo segue un ordine matematico. Molte delle risposte che gli si affacciavano alla mente si fondavano sulla ricerca di schemi ordinati, ripetitivi e regolari. Un’idea che Keplero pensò – almeno per un certo tempo – essere risolutiva, fu quella di far ricorso alle simmetrie dei cinque poliedri regolari, i cosiddetti solidi platonici, che presentano facce poligonali regolari.

L’interesse per i poliedri regolari risale ai pitagorici, i quali dovevano aver osservato i minerali di pirite, un solfuro di ferro che può essere estratto dalle colline della Sicilia, i cui cristalli si presentano come cubi, dodecaedri o ottaedri. Nel Timeo di Platone i poliedri regolari sono utilizzati per rappresentare gli elementi primordiali dell’intero Universo,[3] quelli già individuati da Empedocle (come si è visto nel capitolo 2):

– il tetraedro regolare, le cui facce (quattro) sono triangoli equilateri, rappresenta il fuoco;
– l’esaedro regolare, o cubo, le cui facce (sei) sono quadrati, rappresenta la terra;
– l’ottaedro regolare, le cui facce (otto) sono triangoli equilateri, rappresenta l’aria;

– l'icosaedro regolare, le cui facce (venti) sono ancora triangoli equilateri, rappresenta l'acqua;
– il dodecaedro, le cui facce (dodici) sono pentagoni regolari, racchiude l'immagine di tutto l'Universo.

Invero, nel libro XIII degli Elementi, Euclide attribuisce ai pitagorici il cubo, la piramide e il dodecaedro, mentre fa risalire a Teeteto, il grande matematico dell'Accademia platonica, la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro. Forse i cinque solidi platonici possono inserirsi l'uno nell'altro in modo da definire un insieme di sfere concentriche i cui raggi corrispondono ai raggi delle orbite planetarie. Sarebbe meraviglioso, se così fosse, perché così si spiegherebbe perché ci sono soltanto sei pianeti. Fu questa l'idea accarezzata da Keplero nel 1595 quand'era ormai sul punto di abbandonare quella sua prima intuizione di inscrivere i poligoni nei circoli. Passare dai poligoni ai poliedri: ecco un'idea così luminosa che Keplero ebbe timore di aver dischiuso un segreto divino. Esitava a darne pubblicazione. Però fece poi una pubblicazione riguardo a una possibile modellazione dell'Universo ottenuta circoscrivendo successivamente sfere e solidi platonici. Perciò rappresentò l'orbita di Mercurio come un guscio sferico (il cui spessore rappresentava la differenza tra le sue distanze dal Sole, quella massima e quella minima, cosiddette di afelio e perielio). Pose quindi questa sfera entro un ottaedro. A sua volta l'ottaedro era circondato da una sfera che rappresentava l'orbita di Venere. Quindi incluse la sfera di Venere in un icosaedro, a sua volta circondato da una sfera rappresentativa dell'orbita della Terra. Tutt'intorno alla sfera della Terra pose un dodecaedro a sua volta racchiuso da una sfera rappresentativa dell'orbita di Marte. Pose quindi il tutto entro un tetraedro circondato da una sfera rappresentativa di Giove. Infine, intorno alla sfera di Giove, pose un cubo e il cubo lo pose in un'altra sfera rappresentativa dell'orbita di Saturno.



Era un'idea luminosa, un'ipotesi da verificare, della quale Keplero era orgoglioso ed entusiasta, e per la quale era pieno di speranze. Affermava: «Il piacere intenso che ho ricevuto da questa intuizione non può esprimersi a parole. Non rimpiangevo più il tempo sprecato; il lavoro intenso non mi affaticava; e se c'era da faticare, volentieri mi sobbarcavo del fardello di giorni e notti passate sui calcoli finché non potessi verificare se le mie ipotesi erano in effettivo accordo con le orbite di Copernico, ovvero se il mio entusiasmo dovesse svanire in una bolla d'aria».[4]

Il punto centrale della questione era l'approssimazione con la quale i diametri delle orbite così determinati potessero accordarsi con i dati delle osservazioni di Tycho Brahe. Risultò che l'accordo non era poi così buono, perciò questo modello di Keplero svanì in una rappresentazione puramente fantasiosa dell'Universo. È probabile che Keplero abbia tentato diversi possibili annidamenti dei poliedri, commutandone l'ordine, in modo da trovare una disposizione spaziale la più soddisfacente possibile. Se una soluzione fosse stata trovata, si sarebbe ricaduti nella fallacia medievale, nonché aristotelica, di suggerire che la simmetria fosse la causa prima del movimento. Che cosa si sarebbe potuto dire, allora, dopo la scoperta di Urano, nel 1781? Scrive in proposito Hermann Weyl nel suo libro La simmetria:[5]

> Noi continuiamo a condividere con Keplero la sua fede in un'armonia matematica dell'Universo, che ha superato la prova di un'evidenza sperimentale sempre più allargata. Tuttavia non ricerchiamo più questa armonia in forme statiche come quelle rappresentate dai solidi regolari, la cerchiamo piuttosto nelle leggi del movimento.

Keplero partiva dal presupposto che i pianeti compiano il loro moto orbitale in circoli all'interno dei quali il Sole occupa una posizione eccentrica. La circolarità perfetta delle orbite costituiva un problema a parte. Proprio come nel vecchio sistema tolemaico, le orbite sarebbero sembrate compiere ogni tanto delle piccole evoluzioni di moto retrogrado: come dei passi di danza prima indietro e poi avanti. Anche nel nuovo modello copernicano, per dar conto del moto retrogrado dei pianeti, occorre procedere ad alcuni aggiustamenti, proprio come in quello tolemaico, introducendo anche qui epicicli minori e il concetto di eccentrico. Nonostante ciò, la previsione del punto in cui si sarebbe trovato un pianeta non sempre risultava abbastanza accurata. Keplero volle che i dati di Brahe, così accurati, fossero rispecchiati con eguale accuratezza nel modello, perciò studiò ogni genere di orbita circolare, modificando il modello – anch'egli – con l'aggiunta di nuovi circoli, procedendo un po' a tastoni perché il modello rappresentasse convenientemente la legge di movimento dei pianeti. Poiché i suoi tentativi non approdavano a risultati soddisfacenti, arrivò a domandarsi se per caso i dati di Brahe non fossero sbagliati, ma ben presto scartò questa possibilità. Sapeva che i pianeti si muovono di moto non uniforme, più velocemente quando si trovano in prossimità del Sole (che, come abbiamo visto, non è esattamente al centro delle orbite circolari dei pianeti), più lentamente quando ne sono lontani. «E se» pensò «si dividesse l'area delimitata dall'orbita circolare in aree uguali, in spicchi convergenti nel punto in cui è posto il Sole?» Fu come un guizzo di pensiero, che, però, fece presa immediatamente. Forse la velocità di Marte varia in modo che il vettore che unisce il pianeta al Sole descriva aree uguali in tempi uguali...

Era come una folgorazione, emersa dallo studio assiduo di una massa soverchiante di dati. Per un po', parve che questa fosse la soluzione, ma c'erano altri problemi. Lo stato di euforia al quale per un istante Keplero si era abbandonato era ancora prematuro. Scrive Keplero stesso:[6]

> Mentre così riportavo il mio trionfo su Marte e gli preparavo, come a uno che fosse ormai sconfitto, una prigione che le sbarre dei dati tabulari e che l'introduzione dei concetti di «equante» ed «eccentrico» avrebbero reso sicura, si mormorava qui e lì che la vittoria era stata vanificata e che la guerra impazzava di nuovo, violenta come prima. Perché il nemico, prigioniero sì, ma sottovalutato, aveva rotto le catene

delle equazioni ed era evaso oltre le sbarre dei dati tabulari.

È notevole il fatto che, fino a quel momento, nessuno aveva considerato che le orbite potessero essere curve diverse da quelle circolari. Certo, le ellissi e le altre sezioni coniche erano state studiate e sviscerate da Apollonio nel III secolo a.C. Ma né Apollonio né le sezioni coniche erano ben conosciuti al tempo di Keplero. Inoltre, le sezioni coniche mancavano di quella perfezione che si addice alle orbite celesti. Il circolo era la più perfetta delle curve e se le sfere celesti sono poste in rotazione da Dio o dagli angeli, devono essere circolari.

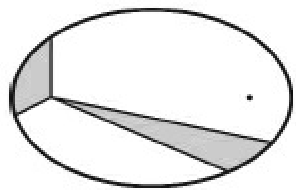
Il titolo di Matematico imperiale perse un po' di significato per Keplero, che era succeduto a Brahe nell'incarico, ma che non si vide estendere da parte di Rodolfo II, il mecenate di Brahe, la stessa larghezza di finanziamenti. Ciò nonostante Keplero perseverava, impiegava il suo tempo nella ricerca dei segreti dell'Universo, senza risparmiare i tesori del suo ingegno, spesso lavorando tutta la notte senza prender cibo e senza nemmeno bere, finché fosse venuto il giorno, quando finalmente si sarebbe abbandonato su un polveroso sofà dell'osservatorio, per un po' di riposo. Durante queste lunghe notti di studio passate sui dati e sulle annotazioni di Brahe, facendo e rifacendo con fatica calcoli su calcoli, venne a capo di due indizi che gli avrebbero consentito di scardinare i misteri del cielo, quello che lui chiamò il mistero cosmografico.

Ecco il primo indizio. Possiamo immaginarci Keplero che un bel giorno, assonnato, sul far dell'alba, borbotta fra sé: «È come se le orbite di tutti i pianeti fossero ellittiche». Quindi, questa volta a voce alta, mentre l'eccitazione adrenalinica pulsa e lo libera della stanchezza, esclama: «Certo! Le orbite dei pianeti, di tutti i pianeti, sono ellittiche e il Sole si trova in uno dei due fuochi dell'ellisse!».

Aveva provato ogni sorta di figura ovale, prima di arrivare alla conclusione che l'orbita planetaria fosse un'ellisse. Un'ellisse: è così semplice! Con il senno del poi possiamo pensare che sia semplice, eppure l'ellisse presenta una complessità che il circolo non ha. Una figura circolare ha un solo centro, invece un'ellisse presenta due «fuochi». È una sezione conica, cioè una curva che risulta dall'intersezione di un piano con una superficie conica.

Possiamo immaginare il seguito di pensieri che si affacciò alla mente di Keplero. Per esempio: il moto di rivoluzione non è uniforme, i pianeti accelerano e rallentano. Se il Sole si trova sul fuoco di un'orbita ellittica, allora la Terra e gli altri pianeti devono muoversi eccentricamente lungo orbite imperfette. Perché il Sole si trova in un fuoco piuttosto che nell'altro? E poi: ponendo il Sole in uno dei due fuochi è del tutto possibile che l'eccentricità geometrica si traduca in un'eccentricità di movimento. Se l'orbita non è circolare, la distanza dei pianeti dal Sole non è più costante. Perciò forse il pianeta accelera in prossimità del Sole e rallenta via via che se ne allontana.

Mentre rimuginava questi pensieri, Keplero, stanco per l'ennesima notte passata sui calcoli, improvvisamente ebbe un'altra idea, il secondo indizio che gli avrebbe consentito di penetrare il mistero cosmografico: le aree. Data l'ipotesi che il pianeta Marte ruoti intorno al Sole seguendo un'orbita ellittica e che il Sole occupi uno dei fuochi di tale ellisse, tracciò due rette, la prima congiungente il Sole con la posizione attuale di Marte, la seconda congiungente il Sole con la posizione occupata da Marte trenta giorni prima. Si rese conto che il settore di ellisse «spazzato» da Marte in trenta giorni superava di poco 1/12 dell'area totale dell'ellisse. Esaminò ancora i dati per verificare l'area del settore di ellisse spazzato da Marte in sessanta giorni e trovò che la proporzione era poco maggiore di 1/6; in novanta giorni era circa 1/4; in centoventi giorni era circa 1/3; in centocinquanta giorni il rapporto tra area spazzata e area totale dell'ellisse era all'incirca 1/2,5; in centottanta giorni il rapporto tra le due aree era 1/2. In altre parole, in corrispondenza di ogni periodo di tempo della durata di trenta giorni, il pianeta «spazzava» un'area che misurava approssimativamente un dodicesimo dell'area totale dell'ellisse, indipendentemente dalla posizione del pianeta. Emozionato, Keplero formulò l'ipotesi che sarebbe diventata la sua seconda legge sul movimento dei pianeti: il segmento che unisce un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali.



Com'è che uno incappa nell'idea che la velocità planetaria sia governata dalle aree descritte da un raggio vettore? È un'intuizione notevole, e c'è da domandarsi se sia un colpo di genio oppure un ritrovamento fortuito, frutto di un'indagine fatta procedendo a tentoni. Fu un'idea rivoluzionaria, perché assegnò un nuovo significato alle cause del moto. Era naturale pensare che le posizioni di un oggetto in moto dovessero allinearsi secondo una qualche curva geometrica. Ma fin dal XIII secolo, quando i matematici del Merton College formularono il teorema dell'accelerazione, si pensò sempre alla velocità come a qualcosa di controllato da eventi immediati, dalle proprietà locali dell'oggetto in movimento. Nel momento in cui Keplero stabilì un nesso tra la velocità e le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta, il controllo della velocità venne assegnato a cause molto più remote. Il divino segreto del movimento dei pianeti era stato svelato.

Non c'è dubbio che Keplero dovesse essere estremamente felice della scoperta di queste due leggi, le quali però non erano sufficienti per convincere gli scettici a oltranza, quelli che negavano l'ipotesi di un Universo eliocentrico. Bisognò aspettare ancora una decina d'anni prima di arrivare alla legge conclusiva. Keplero cominciò con il prendere in considerazione la distanza media tra Marte e il Sole. Questa distanza è 1,53 volte la distanza media che separa la Terra dal Sole. Il periodo di rivoluzione di Marte (cioè l'anno di Marte) misura 1,88 anni della nostra Terra. Ora $1{,}53^3$ è molto vicino a $1{,}88^2$, con una differenza minore del 5%. E per Venere? Per Giove? Ebbene, in tutti i casi esaminati, il quadrato del periodo di rivoluzione del pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole. Questa è la terza legge di Keplero. Così si completa l'insieme di leggi alle quali in seguito si farà riferimento per affrontare l'argomento decisivo: la causa del moto. Ma per trovare quella causa bisogna aspettare Newton, un buon mezzo secolo dopo.

Il XVII secolo era diverso dal XVI. Grazie all'intreccio della sperimentazione con la matematica, la fisica non soltanto avrebbe scoperto i fenomeni terrestri ma avrebbe anche portato alla luce le meraviglie dell'Universo, andando oltre ciò che nessuno nel secolo precedente avrebbe potuto prevedere. Il XVII secolo apparteneva a Galileo, Newton e molti altri abili sperimentatori e inventori che potevano fare affidamento sull'arte della stampa e sulla condivisione deliberata della conoscenza in tutta Europa. Gli scienziati non erano più confinati nei loro studioli, nella contemplazione delle antiche opere di Aristotele o nell'ossequio del dogma liturgico della Chiesa. Gli scienziati adesso avevano i loro circoli e s'incontravano nelle società scientifiche, che possiamo considerare – per quei tempi – l'equivalente dei nostri blog e dei forum presenti in Internet. Naturalmente, c'era ancora chi lavorava isolato, senza comunicare le proprie idee con gli altri: monaci che non conobbero mai altro luogo che il loro monastero, conti che quasi mai si allontanarono dai loro castelli in Boemia. E, prima di allora, Leonardo da Vinci aveva studiato l'anatomia dell'uomo operando in segreto la dissezione dei cadaveri. Leonardo studiò anche i movimenti della Terra intorno al Sole. Disegnò aeroplani, sottomarini e paracadute. Ma non pubblicò niente, così i suoi disegni e le sue brillanti intuizioni rimasero sconosciuti fino al XX secolo, quando i suoi quaderni tornarono alla luce.

Francesco Bacone e Cartesio furono all'avanguardia nello stabilire le basi di questa nuova «filosofia naturale». Misero in discussione i vecchi metodi di ricerca della conoscenza, ritenendo che non esistesse un metodo affidabile per arrivare a una conoscenza della natura del tutto scevro di incertezze. Sostenevano che i metodi medievali erano sconsiderati: non ha senso, infatti, ricercare la verità della natura cominciando con il postulare qualcosa e deducendo quindi la verità da questi postulati. La verità della natura può emergere razionalmente solo da un'accurata indagine della natura stessa, dopo averla interrogata con la sperimentazione. Bacone formulò nel suo Novum Organum una procedura per l'indagine della natura, affermando che per conoscere la verità scientifica dobbiamo procedere dal particolare al generale, cominciando con l'osservare molte «istanze» (così lui le chiamava) di un singolo fenomeno, in modo da isolare il nocciolo della verità. Per sapere che le maree sono causate dall'attrazione lunare, occorre osservare la marea molte volte: quand'è bassa, quand'è alta e nelle condizioni intermedie. Naturalmente, al tempo di Bacone esistevano modelli matematici delle maree e c'erano buone ragioni per ritenere che le maree si manifestassero in relazione all'attrazione lunare. Ma la verità vale quanto il suo modello, perciò è necessario che il modello rappresenti fedelmente la realtà. E per convincere gli scettici che il modello riflette la realtà occorrono osservazioni e misure.

Cartesio era un matematico che pensava che la natura fosse caratterizzata da una dicotomia: da una parte l'intelletto e la consapevolezza, la sostanza spirituale; dall'altra tutto ciò che si trova fuori dell'intelletto, la sostanza corporea. Scrisse che è possibile capire con l'intelletto «la forza e l'azione del fuoco, dell'acqua, dell'aria, delle stelle e dei cieli, e quelle di tutti i corpi intorno a noi, così distintamente come noi comprendiamo le arti meccaniche dei nostri artigiani» e che come l'artigiano «possiamo utilizzare queste forze per tutti i fini che si convengono loro, facendo di noi stessi i signori assoluti della natura».

TERZA PARTE

Zenone nelle sabbie del tempo

7. Un passo indietro per la misura del tempo

Ci sono cose che vediamo e altre no. La crescita di una pianta, per esempio: non riusciamo a vederla nel suo sviluppo graduale, istante dopo istante. Se vediamo una cellula vegetale dividersi, ci domandiamo come da un solo nucleo se ne siano originati due. E se vediamo un nucleo che si sdoppia, andiamo a ricercare il momento in cui un singolo cromosoma ha dato origine a due cromosomi. Ancora, nella mitosi, cioè nella divisione cellulare, andiamo a ricercare il momento in cui gli acidi nucleici e le proteine hanno compiuto la prima fase del processo di replicazione. Non importa quanto minutamente dividiamo il tempo, troviamo sempre che nello sviluppo della pianta c'è una qualche discontinuità. Si arriva sempre a un punto cui l'uno diventa due, proprio come alla fine del primo paragrafo della Genesi, quando Dio divide «la luce dalle tenebre». Torniamo così a quelle antiche questioni che Zenone e Parmenide posero per primi. La continuità è uno strumento – soltanto uno strumento – per circoscrivere il come del paradosso della freccia di Zenone. Ma Zenone ha in serbo altri interrogativi. Per un atomo che abbia sede in una delle sue frecce, gli atomi vicini sono come un universo a parte. Via via che la freccia si sposta rigidamente, quell'atomo non raggiungerà mai il suo vicino il quale, presumibilmente, si è spostato di una distanza uguale.[1] Per un osservatore umano, il tempo impiegato da un atomo per spostarsi nella posizione occupata precedentemente dall'atomo contiguo è incommensurabilmente breve. Eppure, dal punto di vista dell'atomo, la distanza coperta è stata enorme. Neanche il più sensibile degli strumenti potrebbe mai osservare un tale spostamento infinitesimale. E se potesse, che dire di metà dello spostamento, o di un quarto, o di un ottavo ecc.? Quale orologio potrebbe mai cronometrare questi spostamenti?

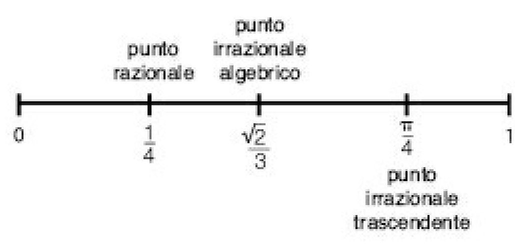
Zenone doveva aver capito che il problema del tempo è intrecciato con il quello della continuità del movimento e che lo spazio si trova in una qualche relazione complessa non soltanto con il tempo, ma con l'osservazione: il che chiama in causa la questione della posizione di un mobile (cioè di un oggetto in movimento) in relazione a un oggetto fisso. Come si possono misurare la posizione, la velocità o le variazioni di direzione di un mobile senza far riferimento a qualcosa che sia fisso, a un sistema di riferimento, appunto?

La nostra percezione diretta del tempo e dello spazio ci dà un'idea della continuità, per quanto vaga: eppure la nostra moderna concezione della continuità va oltre ogni possibile familiarità con il mondo reale. Gli antichi matematici greci non avevano alcuna idea delle variabili algebriche continue e non avevano una definizione del continuo aritmetico paragonabile alla nostra, posto che facciamo riferimento alla retta dei numeri reali. Ci vollero 2500 anni per passare da quella concezione intuitiva della continuità che si aveva al tempo di Zenone alla sua definizione, logicamente rigorosa, fornita nel tardo XIX secolo dai matematici Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass e Richard Dedekind. Oggi si fa riferimento a una continuità che è un'astrazione, che prescinde cioè dal mondo che cade sotto i nostri sensi, e che fa riferimento alle sottigliezze dei concetti di infinitamente grande e di infinitamente piccolo, nonché a quello di convergenza di serie infinite. La continuità – che un tempo aveva come unico fondamento le impressioni visive della realtà – è oggi ridefinita nel quadro di un pensiero logico rigoroso.

Anche se gli irrazionali avevano trovato una trattazione geometrica negli Elementi di Euclide, non vennero accettati come numeri prima dell'era di Newton, quando furono utilizzati nell'ambito della cinematica, in particolare nello studio della continuità del moto. Prima della metà del XIX secolo si sapeva che la retta dei numeri razionali presenta delle lacune, anche se avrebbe destato enorme sorpresa scoprire quanto questi vuoti fossero frequenti nella retta dei numeri reali: ma i numeri razionali bastavano ai fisici e agli ingegneri per formulare previsioni riguardo al mondo reale, con approssimazioni razionali a qualunque grado di precisione.

L'insieme dei numeri reali (quei numeri che possono essere espressi con un numero di decimali potenzialmente infinito) è rappresentabile su una retta dall'insieme di punti che si estendono infinitamente nei due versi a partire da un punto rappresentativo del numero zero. Data una scala di misura, i numeri possono essere pensati come le misure delle distanze di quei punti dallo zero: i numeri negativi sono a sinistra dello zero, i positivi alla destra.

La retta dei numeri reali è una idealizzazione, a rigore non potrebbe essere tracciata, tuttavia una sua illustrazione può essere d'aiuto. Consideriamo su questa retta che si estende indefinitamente nei due versi un breve segmento, quello rappresentativo dei numeri reali da 0 a 1. Si tracci un segmento di lunghezza pari a 1. Percorrendo il segmento da sinistra a destra, l'estremo di sinistra rappresenta il numero 0; un punto alla distanza d (distante dallo 0 meno di un'unità) rappresenta il numero d. Nella figura qui sotto il punto che abbiamo notato come «1/4» dista dallo 0 un quarto della misura unitaria; il punto che abbiamo notato come «π/4» dista dallo zero di una quantità che in rapporto all'unità vale un quarto di π. In questo segmento un punto P si dice razionale se la sua distanza dall'estremo sinistro del segmento può essere espressa da una frazione della misura unitaria. I punti irrazionali sono allora quelli che si trovano a una distanza che non può essere espressa come frazione della misura unitaria.



L'insieme dei numeri razionali è un sottoinsieme relativamente piccolo dei numeri reali: è costituito infatti da quei numeri reali che possono venire espressi sotto forma di frazione o, equivalentemente, che possiedono un numero finito di cifre decimali, oppure un numero infinito di cifre decimali ma disposte con uno schema ripetuto (i numeri periodici).

Nella trattazione dei paradossi della dicotomia e di Achille, i valori dello spazio e del tempo sono entrambi considerati come misure razionali determinate in relazione alla loro rappresentazione nella retta dello spazio e del tempo, rispettivamente. Nel caso della dicotomia, la domanda è che cosa succede a distanze pari a $1/2^n$ unità; nel caso di Achille, se le velocità dei concorrenti sono espresse da numeri razionali, e se il vantaggio iniziale della tartaruga è misurato da un numero razionale, allora ciascun punto in esame nelle argomentazioni di Zenone si trova a distanza razionale dalla linea di partenza.

Un importante interrogativo che si intravede sullo sfondo dei paradossi di Zenone sul moto è il seguente: se la punta della freccia nel suo spostamento è arrivata a un punto che sulla retta dei numeri corrisponde a un numero reale, come fa ad arrivare al punto successivo della traiettoria, dal momento che sulla retta dei numeri reali non esiste alcun punto successivo? La nozione di «punto successivo» (o «successore») non ha significato nella geometria della retta dei numeri reali (o anche soltanto dei numeri razionali). Per esempio, si consideri π, la cui rappresentazione decimale è 3,141592654... Ebbene, il seguito di cifre indicato dai puntini è infinito. Perciò qual è il successore di π? Oppure, si consideri il numero razionale 1/2, che possiamo scrivere 0,5 in notazione decimale. Bene, qual è il successore razionale di questo numero? Certo non 0,51 né 0,501 né ancora 0,5001 né alcun numero N che ci venga in mente di ottenere aggiungendo a 0,5 un seguito di cifre decimali costituito da una serie di zeri con un 1 alla fine: infatti, se considerassimo N il successore di 0,5, basterebbe introdurre un altro 0 davanti all’1 finale per trovare un altro numero, N', che si frappone tra lo zero e quel numero – N – che pensavamo fosse un successore di 0,5. Così se la punta della freccia si trova in un certo istante a metà del percorso da compiere, cioè nel punto 0,5, qual è il punto successivo in cui si troverà?

Alla fine dell’estate del 1872 Georg Kantor, professore straordinario di matematica a Halle, in Germania, ebbe la sconvolgente rivelazione che sulla retta dei numeri ci sono «molti più» punti irrazionali che punti razionali. Se sulla retta dei numeri fossero rappresentati soltanto numeri razionali, la retta presenterebbe vuoti DAPPERTUTTO! Tra ogni coppia di numeri razionali non ci sarebbe soltanto un vuoto, ma un’infinità di vuoti: segue di qui che la retta dei numeri razionali tutto potrebbe dirsi, tranne che una linea continua.

Ciò che si è detto per lo spazio può dirsi anche del tempo. Che cos’è il tempo? Qualcosa avviene e qualcosa segue. Un evento segue un altro in una sequenza che in qualche modo dev’essere possibile contenere. La punta della freccia si muove da un posto all’altro. Prima, era lì; adesso è qui; poi si troverà colà; più in là nel futuro sarà giunta a destinazione. Questi sono gli ingredienti del tempo.

Da principio gli uomini non avevano il concetto di «cinque minuti», anche se dovevano avere la nozione del tempo che trascorre con continuità dalla levata al tramonto del Sole. La precisione sarebbe venuta dopo, con l’esperienza via via accumulata e con il nascere di nuove necessità. I pesci abboccano preferibilmente il mattino, le renne pascolano nelle pianure di giorno: non sono molte le cose che si possono fare di notte. Leggiamo all’inizio della Genesi, il grande libro della creazione:[2]

> Dio disse: «Sia la luce!» E la luce fu. Dio vide che la luce era cosa buona e separò la luce dalle tenebre e chiamò la luce giorno e le tenebre notte. Fu sera e fu mattina: primo giorno.

Secondo la Bibbia, la divisione del tempo che Dio ci ha dato si articola in giorni, l'uno dopo l'altro. Dopo di ciò, per collocare convenientemente gli eventi nella scala temporale l'uomo ha escogitato vari altri sistemi. Si è cominciato dividendo il giorno in due parti, prima e dopo il mezzogiorno. Al tempo delle antiche civiltà babilonese ed egiziana, quando le attività dell'uomo cominciarono a essere così complesse da richiedere una scansione più accurata del tempo, il giorno fu spezzato in ventiquattro ore. La misura del tempo era fornita dai fenomeni celesti. Il tempo della notte fu diviso in dodici ore, con riferimento al movimento apparente di dodici costellazioni; si stabilì che le ore del giorno fossero anch'esse dodici, per analogia.

Per anni il tempo è stato misurato senza che le ore fossero divise in minuti. Gli strumenti di misura erano all'inizio meridiane e orologi ad acqua: in questi ultimi un recipiente riempito d'acqua presentava in fondo un piccolo orifizio dal quale l'acqua defluiva a velocità pressoché costante, mentre un galleggiante era collegato a un sistema di leve terminante con un indicatore che serviva da marcatempo. La difficoltà di utilizzare il Sole per misurare intervalli di tempo più brevi nasceva dalla diversa durata del giorno e della notte con il trascorrere delle stagioni.

Gli orologi ad acqua furono usati sia dagli egizi sia dagli antichi romani. La divisione del giorno in due parti, antimeridiana e pomeridiana, risale al IV secolo a.C. (di qui le indicazioni a.m. e p.m., usate nella lingua inglese, per significare le ore antimeridiane e pomeridiane, da ante meridiem, «prima di mezzogiorno», e post meridiem, «dopo mezzogiorno»). In seguito, si cominciò a dividere il giorno in quarti: primo quarto del mattino, secondo quarto prima del mezzogiorno, pomeriggio e sera.

Con il I secolo a.C., la misurazione del tempo da parte dei romani cominciò a diventare più sofisticata. Le ore del giorno furono misurate in maniera diversa rispetto a quelle della notte. In pieno inverno, quando il giorno dura un po' meno di nove ore (secondo il significato che oggi attribuiamo alla parola «ora»), i romani stabilirono di dividere le ore del giorno in dodici segmenti di quarantacinque minuti (anche in questo caso, si intendano quarantacinque dei nostri minuti). D'estate, avveniva il contrario. Il deflusso d'acqua dei loro orologi ad acqua avrebbe dovuto essere regolato progressivamente con il trascorrere delle stagioni, ma una tale ricalibrazione continua non era possibile nemmeno con i migliori orologi. Perciò, una volta al mese, interveniva un addetto, incaricato ufficialmente di azzerare gli orologi di tutta Roma.

In seguito, i monaci cristiani e i muezzin della fede islamica ebbero la necessità di scandire il tempo per invitare i fedeli alla preghiera. In Europa i monaci fecero costruire dei dispositivi meccanici – antesignani delle nostre sveglie – azionati dalla caduta di gravi appesi a delle funi arrotolate intorno a un tamburo. Compito di questi meccanismi era far suonare delle campanelle che avrebbero svegliato un campanaro che a sua volta avrebbe fatto rintoccare le grosse campane issate in cima al campanile. Questi orologi meccanici non dividevano il giorno e la notte in parti uguali, ma marcavano i tempi della liturgia delle ore: il mattutino, al sorgere del Sole; la nona, alle tre del pomeriggio (cioè, l'ora nona calcolando le ore del giorno a partire dal sorgere del Sole); il vespro, la sera; la compieta, prima di andare a dormire. Perciò in inglese orologio si dice clock, che deriva dal tedesco Glocke, che a sua volta significa «campana».

La suddivisione fine del tempo in minuti e secondi venne più tardi, allorché lo sviluppo del commercio pose l'esigenza della puntualità: negli appuntamenti tra i partner commerciali, nella spedizione delle merci e nell'organizzazione dei sistemi di trasporto e scambio interno. Una tale accurata suddivisione richiedeva una maggiore precisione di quella fornita dalle meridiane o dagli orologi ad acqua. Si sentiva l'esigenza di un dispositivo meccanico che potesse contare intervalli di tempo della stessa durata, alternativo al sistema di misura del tempo basato sulla luce del Sole o sul deflusso più o meno costante di materiali come acqua e sabbia o – anche – sul consumo progressivo dell'olio di una lucerna.

Capita che alcune delle grandi invenzioni che sono alla base del progresso umano non abbiano il riconoscimento che meriterebbero. Si parla per esempio della ruota, dell'arco e della freccia, della leva, del martello, del motore a vapore, della vite, delle lenzuola con gli angoli ecc.: tutte invenzioni che meritano grande considerazione. Ma, a parte la vite, queste invenzioni nascono da osservazioni casuali. Quanti tronchi d'albero o quante melagrane devono essere rotolati sul terreno prima che l'idea della ruota prendesse corpo? Quanti rami flessuosi sono stati osservati sugli alberi prima che ci si rendesse conto che l'elasticità del legno inflesso poteva essere utilizzata per costruire un arco? E quante volte sarà stato osservato un tronco posto a cavallo di una pietra prima che i bambini scoprissero l'altalena, o prima che gli adulti si rendessero conto della potenza di una leva? Molti di questi dispositivi o macchine sono stati scoperti, non sono stati inventati. La natura, infatti, ha voluto che alcuni esempi di princìpi d'immediato utilizzo fossero sotto gli occhi di tutti, ha seminato indizi che qualunque uomo avrebbe potuto cogliere. E se è vero che la civiltà non sarebbe progredita molto oltre il livello del Paleolitico in assenza di alcune di queste invenzioni, c'è tuttavia un'invenzione che aspetta ancora di essere valutata in tutta la sua importanza. Gli orologiai chiamano questa invenzione scappamento.

I primi orologi che utilizzavano acqua, sabbia o anche olio richiedevano la presenza permanente di un addetto al loro funzionamento, il che limitava la continuità di esercizio della loro funzione. Inoltre non erano molto accurati. Il problema del tempo è che esso è insieme continuo e regolare. Che cos'altro al mondo, a parte il tempo, presenta queste caratteristiche? Anche il polso, che si ritiene Galileo abbia utilizzato per misurare la durata di certi fenomeni naturali, spesso cambia il suo ritmo, potendosi dire regolare soltanto in periodi di tempo circoscritti. Bisognerebbe fare riferimento a un meccanismo in movimento continuo e costante, ma la sua realizzazione non è così facile come sembra. Pensandoci bene, questo è stato veramente uno dei problemi più difficili per l'umanità.

In questi ultimi novecento anni, il funzionamento della maggior parte degli orologi meccanici è sempre stato basato sulla scansione del tempo realizzata da un movimento oscillatorio, un principio comune a tutti gli orologi che sono stati via via escogitati. In teoria, è possibile prendere in considerazione diversi tipi di «oscillatori», cioè generatori di movimento oscillatorio. Un primo tipo di oscillatore è costituito da una massa accoppiata a una molla. Pensiamo a una molla verticale, a riposo, alla quale si appenda una certa massa. Se portiamo in basso la massa posta all'estremità della molla e poi la rilasciamo, vedremo la molla oscillare su e giù finché non avrà perso tutta la sua energia cinetica, dopo un certo numero di cicli di accorciamento e allungamento: la perdita di energia è dovuta all'attrito con l'aria e alla dissipazione termica tramite le forze molecolari di espansione e contrazione. Quando la molla viene allungata o compressa, essa esercita una forza di richiamo che è proporzionale alla lunghezza della sua estensione o compressione: è quanto afferma la legge di Hooke.[3]

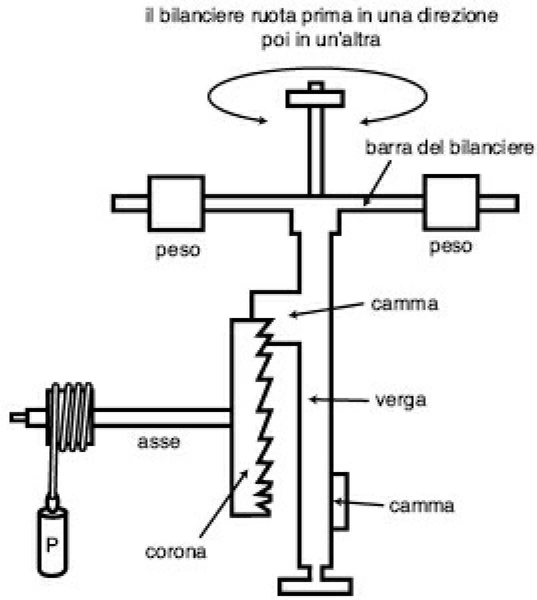
Come secondo esempio di oscillatore, consideriamo un pendolo. Spostiamo di lato la massa appesa all'estremità del pendolo, quindi rilasciamola: nel suo movimento, l'asta del pendolo torna per un istante in posizione verticale, quindi prosegue finché la massa si trova alla stessa altezza in cui si trovava all'inizio del moto. Poi la massa torna indietro alla posizione di partenza e comincia un nuovo ciclo di oscillazione. Anche il pendolo perderà poco per volta la sua energia: l'energia meccanica si trasforma in calore a causa di fenomeni dissipativi, in questo caso dovuti ancora alla resistenza dell'aria e alla frizione dello snodo dell'asta nel suo punto di sospensione. Ciclo dopo ciclo, l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce: tuttavia, come notò Galileo, il periodo di oscillazione rimane costante, non dipendente dall'ampiezza dell'oscillazione.

A questo punto osserviamo due cose: a) il movimento oscillatorio (quello della massa accoppiata alla molla, o quello del pendolo) ci permette di contare gli intervalli di tempo in relazione al numero di oscillazioni; b) il funzionamento dell'oscillatore può essere persistente, se riusciamo a trovare un modo per compensare l'energia perduta a causa dei fenomeni dissipativi. Sono due cose diverse, ma possiamo realizzarle entrambe, grazie allo scappamento.

È possibile che il primo scappamento sia stato inventato in Cina nell'XI secolo.[4] Il suo inventore, Su Sung, costruì un enorme marchingegno all'interno di una torre alta parecchi piani, comprendente una noria, cioè una ruota come quelle per il sollevamento dell'acqua in uso presso gli antichi egizi, con un insieme di secchielli incernierati tutt'intorno: la noria attinge e versa l'acqua nei recipienti di raccolta così da imprimere un impulso, a intervalli regolari, a un sistema di leve, che hanno il compito ora di intercettare, ora di liberare i denti di un ingranaggio che altrimenti continuerebbe a ruotare senza controllo. Anche se può sembrare azzardato suggerire che questo orologio cinese abbia impiegato il principio dello scappamento meccanico in senso compiuto, certo ha fatto uso, per la regolazione del tempo, di un meccanismo di va-e-vieni.

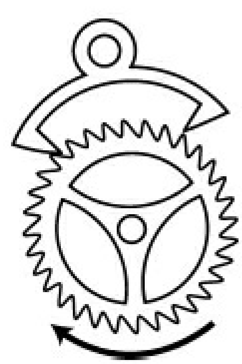
Un orologio installato, già nel 1286, nella cattedrale di San Paolo di Londra richiedeva per il suo funzionamento l'assistenza di un certo Bartolomeo, nel cui salario giornaliero erano compresi una pagnotta e un certo quantitativo di birra. Circa cinquant'anni più tardi, Walter Lorgoner migliorò l'orologio completandolo con un angelo ruotante: la sua retribuzione fu di sei sterline, nella quale però erano compresi i costi da sostenere per «il ferro, l'ottone e ogni genere di cose che si rendesse necessario per completare il sopraddetto lavoro».[5] Applicando un peso all'estremità di una fune avvolta intorno a un cilindro collegato a una scatola di ingranaggi che mette in rotazione l'indicatore orario, il peso cadrà tirando con sé la fune, la quale fa girare il cilindro che a sua volta mette in rotazione l'indicatore, che continua a girare finché o il peso ha raggiunto la posizione di fine corsa toccando il terreno, oppure la fune si è svolta completamente dal cilindro. Così però l'orologio non avrà scandito il tempo ma avrà piuttosto misurato il tempo necessario perché il peso cada a terra o la fune si sia svolta dal cilindro.

Il problema è quello di ottenere che il tempo sia scandito regolarmente. La soluzione sta, come abbiamo detto sopra, nel meccanismo di scappamento. Il primo scappamento meccanico, a parte l'interessante marchingegno costruito da Su Sung, è stato quello a corona e bilanciere, che continuerà a essere sempre lo stesso, più o meno come fu concepito nel dodicesimo secolo, ancora per quattrocento anni.[6] Questo è il suo funzionamento: anzitutto c'è una ruota di scappamento che prende il nome di «corona» per il suo aspetto simile, appunto, alla corona di un re. Infatti, la corona presenta un insieme di denti triangolari con un profilo curvilineo nel verso di rotazione (si veda la figura a fianco). La corona ruota intorno a un asse orizzontale. C'è poi una barra trasversale con funzione di volano, comprendente due masse perfettamente bilanciate, che ruota intorno a un asse verticale, detto anche «verga»: l'insieme della massa ruotante e del perno verticale prende il nome di «bilanciere». La corona è azionata da una forza motrice, il più delle volte fornita da un peso all'estremità di una fune arrotolata intorno a un tamburo coassiale con la corona. Il bilanciere viene posto in rotazione manualmente: poiché il perno verticale presenta, a due diverse altezze, due camme lamellari, avviene che una camma, per esempio quella superiore, sia inizialmente a contatto con il dente più in alto della corona rotante. Il bilanciere ruota nel verso di rotazione impresso manualmente, la camma superiore si disimpegna dal dente della corona sul quale era ingranata, quindi la camma inferiore (che rispetto alla prima presenta un'angolazione di 90 gradi) ingrana con il dente più in basso della corona. A questo punto il bilanciere si arresta e la corona – che continua a girare animata dalla forza motrice fornita dal peso in caduta – trasmette alla camma inferiore l'energia necessaria perché il bilanciere riprenda la rotazione, questa volta nel verso contrario. Un ciclo completo di rotazione, prima in un senso poi nell'altro, si ripete sempre uguale a se stesso, sempre nello stesso tempo. Un indicatore opportunamente collegato alla corona, la cui rotazione è regolata dal meccanismo di scappamento così realizzato, segnalerà il trascorrere del tempo.



Un problema di questo dispositivo, pur meraviglioso, è che il bilanciere richiede una notevole rotazione. È un problema che lo sconosciuto e abile inventore del dispositivo probabilmente conosceva. Infatti, per entrare e uscire dai denti della corona, le camme dovevano presentare una certa angolazione, e in molti casi la rotazione del bilanciere doveva essere superiore a venti gradi. Il fatto è che il bilanciere ruota solo di un certo arco di circonferenza, prima di venire arrestato, e il periodo di tale oscillazione non segue una formula semplice come quella che regola l'oscillazione completa di un pendolo. Inoltre gli errori aumentano con l'aumentare dell'ampiezza.[7] Un bilanciere che oscillasse con un arco di rotazione di 20 gradi poteva accelerare o ritardare in un giorno anche di un quarto d'ora, pertanto l'orologio avrebbe richiesto periodici aggiustamenti. D'altra parte, il periodo di oscillazione del bilanciere dipende dalle sue dimensioni, che sono soggette a variazioni termiche. L'idea dunque era buona, ma per arrivare a determinare accuratamente il tempo occorreva migliorare il meccanismo di scappamento.

Il migliore tra i molti ingegnosi miglioramenti proposti fu lo scappamento ad àncora (si veda la figura a pagina seguente). Il concetto è che se l'angolo di oscillazione potesse ridursi a 2 gradi, l'orologio difetterebbe per soli 6,6 secondi nell'arco di ventiquattr'ore. Ebbene, il meccanismo di scappamento ad àncora richiede una rotazione del bilanciere di appena pochi gradi.



A questo dispositivo di modeste dimensioni, così piccolo da poter stare dentro un ditale per sarta, si deve un bel po' del progresso della civiltà moderna. Due sono le sue funzioni.

La prima, molto semplice, è di regolare il movimento circolare degli orologi meccanici bloccando e rilasciando alternativamente i denti di una ruota dentata, facendo in modo che essa avanzi un dente per volta. La seconda sua funzione è quella di trasmettere un po' di energia all'oscillatore (al braccio oscillante di un pendolo oppure a un oscillatore costituito da una massa accoppiata a una molla), assicurando la continuità del movimento.

Consideriamo dunque il caso di una molla, una molla a spirale montata coassialmente su un piccolo volano. Quest'ultimo viene fatto ruotare dallo srotolamento della molla; in questo modo accumula una certa quantità di moto, grazie alla quale la molla stessa viene sovraelongata oltre lo stato di riposo. La molla, quindi, si riavvolge. Poi il ciclo si ripete. Così il volano – che anche in questo caso prende il nome di bilanciere – alterna una rotazione in senso orario con una in senso antiorario. In corrispondenza di ciascuna variazione di senso, l'una o l'altra delle camme dello scappamento ad àncora disimpegna un dente della ruota dentata, che avanza un dente per volta, sempre nello stesso verso, orario.[8] Il tic tac caratteristico degli orologi meccanici è dovuto proprio allo scappamento che alternativamente trattiene e rilascia un dente della ruota.

Nessuno sa con certezza chi abbia inventato il meccanismo di scappamento ad àncora. Forse fu l'orologiaio londinese William Clement, il quale nel 1671 costruì per quaranta sterline un orologio con scappamento ad àncora, provvisto di un lungo gambo oscillante, per il King's College di Cambridge. Oppure fu Robert Hooke, fisico geniale, che presentò un orologio provvisto di scappamento ad àncora alla Royal Society nel 1666, dopo il grande incendio di Londra. Chiunque sia stato, l'inventore di questo scappamento deve aver capito che anche se il tempo può sembrare – o anche è – continuo, tuttavia la sua misura richiede una frammentazione in intervalli discreti.

Vi furono in seguito ulteriori miglioramenti, che consentirono agli orologiai di miniaturizzare i loro congegni: per esempio, la forza motrice che fa avanzare la ruota dentata venne ricavata dal caricamento di una molla a spirale invece che dalla caduta di un peso all'estremità di una fune arrotolata su un tamburo. Rimase comunque l'idea fondamentale: la trasmissione dell'energia da una fonte di energia motrice – un peso in caduta o una molla caricata – a un qualche sistema nel quale un moto oscillatorio marca con fedeltà il trascorrere del tempo. Non importa come avviene il conteggio (in alcuni orologi c'è un contatore che retrocede di una posizione per poi avanzare di due): in ogni caso, in ogni orologio, dall'orologio ad acqua del cinese Su Sung, dove il conteggio del tempo avviene per impulso dell'acqua versata dai secchi della noria, ai moderni orologi atomici che utilizzano la frequenza naturale della radiazione del cesio 133, corrispondente alla transizione tra due specifici livelli energetici dello stato fondamentale dell'atomo (tale frequenza è superiore a 9000000000 di cicli al secondo), la misura del tempo è il risultato di un processo di conteggio discreto. Gli orologi attuali, anche i più semplici, misurano il tempo in relazione alla frequenza di vibrazione di un cristallo di quarzo (circa 100000 cicli al secondo).

Il metodo di misurazione del tempo è dunque in contrasto con il nostro modo di concepire la natura del tempo. Noi pensiamo al tempo che procede con gradualità in una direzione, non in due: perché allora abbiamo bisogno di un meccanismo alternativo con inversione periodica del senso di marcia? In ogni caso, misuriamo il tempo per mezzo di meccanismi che, pur diversi, presentano tutti un avanzamento a singhiozzo. I paradossi di Zenone ci ricordano che il tempo non potrebbe essere così continuo come ci appare. C'è dunque una unità elementare di tempo indivisibile?[9] Potrebbe il tempo, come la luce, consistere in minuscole particelle elementari, «quanti di tempo»? Werner Heisenberg, esponente geniale della meccanica quantistica, suggerì una volta che la più piccola unità di tempo è qualcosa dell'ordine di 10^{-26} secondi. Nella fisica moderna è possibile rilevare differenze tra intervalli di tempo fino a una frazione di secondo pari a 1 fratto mille miliardi. Di fatto ciò che finora abbiamo chiamato «orologio» non è altro che un meccanismo generatore di oscillazioni controllate e misurabili. Se Heisenberg ha ragione, qualora noi trovassimo una qualche radiazione atomica con frequenza di vibrazione pari a 10^{26} Hz, avremmo allora l'orologio universale. Ma che dire se il tempo è invece continuo?

Zenone ci ha portato abilmente a pensare che la sua freccia si sposti a scatti, che Achille debba continuamente e sempre a raggiungere il punto dove si trovava la tartaruga e che noi quando attraversiamo una stanza dobbiamo considerare l'operazione di arrivare a metà della distanza da percorrere e, prima di ciò, di arrivare alla metà della metà del percorso ecc. C'è voluto un bel po' perché ci rendessimo conto che un altro modo di considerare il paradosso del movimento è affrontare il paradosso della misura del tempo.

8. Cartesio e la magia degli assi coordinati

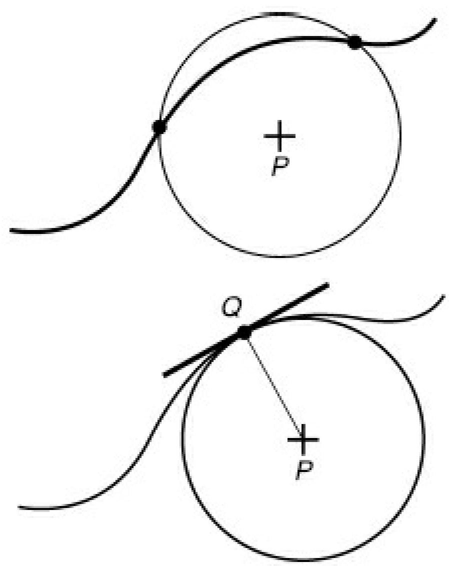
Siamo nel 1636: se vi trovaste a La Flèche, nella Francia meridionale, e foste la proverbiale mosca nella stanza da letto di Cartesio, potreste vedere il filosofo che giace a letto e vi osserva. La sua idea più brillante fu concepita un giorno che osservava una mosca che ronzava nella stanza e compiva una sua evoluzione come tracciando una linea curva: Cartesio pensò che doveva essere possibile descrivere quella curva in termini di distanza dei suoi punti dalle pareti. Fu questa la nascita di una rivoluzione nel modo di pensare la matematica, che da quel giorno non sarebbe più stata la stessa.

Questa storiella fu inventata dal filosofo tedesco Daniel Lipstropius, contemporaneo di Cartesio e suo biografo. In seguito la rimpolpò nella cornice di una storia di più ampio respiro, nella quale si narrava come Cartesio, a causa della salute cagionevole, fosse solito attardarsi a letto, tutte le mattine, meditando sul modo di portare tutte le scienze a quel livello di certezza che caratterizza le matematiche.

Se la narrazione fosse vera, una mosca sarebbe responsabile di una delle svolte più radicali nella storia della matematica e nella comprensione dei suoi meccanismi. Si dovrebbe a una mosca quel primo incontro tra algebra e geometria che sarebbe poi diventato un solido matrimonio. Se la mosca traccia una linea curva nello spazio, ecco che dovrebbe lasciare dietro di sé una scia di dati aritmetici: così pensò Cartesio che, secondo questa narrazione, avrebbe capito che la geometria di una curva può essere dedotta a partire dai dati aritmetici e che, inversamente, i dati aritmetici possono essere dedotti dalla geometria della curva; in definitiva, la geometria e l'aritmetica non sono altro che diverse interpretazioni della stessa matematica.

In ogni caso è provato che Cartesio era solito, veramente, attardarsi a letto fino a mattino inoltrato, immerso in un turbine di pensieri riguardo alla sua esistenza e al mondo della natura tutt'intorno. Era questa un'abitudine alla quale indulgeva fin da ragazzo, quando gli si concesse di starsene a letto per via dei suoi accessi di tosse secca, che a quanto pare cominciavano a dargli tregua soltanto nel pomeriggio. Molti di tali pensieri includevano la convinzione che il mondo fisico fosse fondamentalmente meccanico: cioè, tutti i fenomeni della natura possono essere spiegati attraverso le leggi della meccanica. Se il mondo è veramente meccanico, allora tutte le teorie fisiche dovrebbero potersi esprimere attraverso un numero ridotto di leggi generali. La geometria analitica di Cartesio consentirà di esprimere la geometria del movimento per mezzo di equazioni algebriche. Grazie alla geometria analitica, fu possibile ricondurre le osservazioni sulla natura a un numero veramente esiguo di principi generali ed equazioni di base.

Cartesio utilizzò ingegnosamente l'algebra per trovare la distanza più breve che separa un punto P da una curva qualsiasi. Era questo un antico problema, già affrontato da Apollonio, nel III secolo a.C., nello studio delle sezioni coniche. Il metodo escogitato da Cartesio consisteva nel costruire una circonferenza generica con centro P. Se la circonferenza interseca la curva, normalmente i punti di intersezione saranno due. Ma se la circonferenza tocca la curva in un solo punto, il raggio tracciato da P al punto di contatto tra circonferenza e curva deve essere perpendicolare alla curva. In questo procedimento la prima cosa da fare è trovare la circonferenza di centro P che sia tangente alla curva (chiamiamo Q questo punto di tangenza): per far ciò si cerca una soluzione che soddisfi le equazioni simultanee della curva assegnata e di una generica circonferenza. Si trovano le coordinate del punto Q. È così possibile determinare il raggio che unisce P con Q nonché ottenere – senza nessuno sforzo – la tangente alla curva nel punto di contatto Q: non è altro che la retta perpendicolare al raggio. Se la circonferenza rappresenta l'orbita di un pianeta, allora la retta tangente in Q rappresenta l'unica direzione del moto del pianeta quando il pianeta si trova in Q.



Con questa sua intuizione, Cartesio pose l'impalcatura per il calcolo infinitesimale, sulla quale poi sarebbero saliti Newton e Leibniz. Comprese l'importanza della tangente a una curva e sviluppò un metodo per trovarla, prendendo in considerazione una circonferenza che intercetti la curva in due punti e variando le dimensioni del cerchio così da far coincidere i due punti. In questo modo la tangente alla curva coincide con la tangente alla circonferenza ridimensionata. Questo procedimento di ridimensionamento rappresentava in nuce quella che più tardi sarebbe stata una delle più grandi conquiste del calcolo infinitesimale.

Cartesio non affermò di stare sulle spalle di giganti, ma riconobbe doverosamente il suo debito nei confronti degli altri matematici che l'avevano preceduto. Menecmo nel IV secolo a.C. aveva scoperto la connessione tra sezioni coniche ed equazioni e i primi geografi greci sicuramente usarono liberamente sistemi di coordinate. Nicola Oresme, già nel 1361, aveva lavorato con un sistema di latitudini e longitudini, facendo riferimento a una prima idea di un sistema di coordinate, comprendente una retta orizzontale per rappresentare il tempo e una retta verticale per rappresentare la velocità. François Viète, con la sua originale notazione matematica, alleggerì notevolmente la poco maneggevole algebra di Cartesio, e Fermat scoprì – con il suo teorema – la relazione che intercorre tra i massimi e minimi locali e le tangenti orizzontali alle curve.

L'intuizione – con ogni evidenza miracolosa – che la geometria e l'algebra siano immagini speculari l'una dell'altra, portò alla nascita della geometria analitica: con ciò Cartesio diede un contributo fondamentale allo sviluppo della matematica, in particolare per quanto riguarda: a) la facilità di calcolo della distanza fra due punti qualsiasi mediante il teorema di Pitagora; b) la possibilità di rappresentare linee rette e sezioni coniche per mezzo di equazioni e proporzioni.

Dopo Cartesio, le curve non sono più considerate figure statiche come le pensarono gli antichi geometri greci, i quali concepirono le coniche – parabole, ellissi e iperboli – come curve ottenute intersecando una superficie con un piano.[1] Invece con Cartesio si cominciò a pensare alle curve come a un insieme di punti dinamici, nel senso che è possibile passare dall'uno all'altro in base a una regola, l'equazione della curva, la quale diventa un «oggetto algebrico» i cui punti sono univocamente individuati da due numeri reali x e y. Questi numeri reali, le coordinate del punto, sono legati gli uni agli altri in una relazione numerica coordinata. Se cambia il primo numero reale, deve cambiare anche il secondo.[2] In questa nuova geometria di Cartesio le curve sono relazioni tra variabili: fu questo un grande progresso che rinnovò radicalmente le strategie della matematica. Nasceva così la possibilità di un calcolo infinitesimale; cambiava inoltre – e per sempre – il nostro modo di considerare i paradossi del movimento formulati da Zenone.

Nel XVI secolo, per mostrare le variazioni dell'altezza sul suolo di un proiettile, osservata in corrispondenza di diversi istanti, i dati sarebbero stati registrati normalmente in una tabella come quella riprodotta nella pagina a fianco. Ma la comprensione del moto del proiettile era solo approssimata: infatti, non c'era modo di sapere quale fosse la quota del proiettile negli istanti in cui non era stata fatta un'osservazione.

t (s)	h (m)
0	1
1	65
2	97
3	97
4	65
5	1

Ai fini della comprensione del moto si può pensare ad altri (e migliori) tipi di schematizzazione. Per esempio, il problema può essere illustrato: a) da un grafico che fornisca una rappresentazione intuitiva dell'andamento prima ascendente e poi discendente dell'altezza del proiettile; b) da un'equazione algebrica che metta in relazione l’altezza h con il tempo t, per qualsiasi valore di t. Osserviamo per esempio che la tabella precedente non ci dice a quale quota si trova il proiettile per t = 2,5 s (questo è l’istante in cui il proiettile raggiunge la sua quota massima), e in generale non ci dice quali siano le quote per valori del tempo che non siano espressi da numeri interi. Se, invece che con la tabella, descriviamo il moto con la sua equazione:

$$h = -16t^2 + 80t + 1$$

ecco che possiamo ricavare h, l’altezza del proiettile, per ogni valore del tempo t.

Si noti che diamo per scontato che l’altezza del proiettile subisca variazioni uniformi con il trascorrere del tempo. Ciò è intuitivo e ragionevole. La rappresentazione della natura continua e progressiva del moto del proiettile ci viene dall’equazione, e non dalla tabella.

Cartesio riteneva che il mondo fosse regolato da leggi meccaniche e che i segreti dell’Universo potessero trovare una spiegazione compiuta grazie alle interpretazioni fornite dalla matematica. Ebbene, il suo metodo delle coordinate fu di grandissimo aiuto in questo lavoro di interpretazione. Per la prima volta fu possibile stabilire un nesso tra spazio e tempo mediante l’algebra, senza ricorrere a una rappresentazione geometrica inattendibile, frutto di immaginazione e intuizione. L’algebra, inventata dagli arabi nel IX secolo, al tempo di Cartesio vantava ormai da 700 anni la fiducia incontrastata dei matematici.

In seguito, un modo del tutto naturale di esaminare la relazione tra spazio e tempo sarebbe stato quello di considerarlo alla luce del concetto di funzione matematica: ma è un concetto che sarebbe stato introdotto da Leibniz soltanto nel 1692, quando affrontò l’argomento delle rette tangenti alle curve. Per convenzione, oggi utilizziamo la notazione y = f(x) indicando con f una legge che assegna a ogni valore di x uno e un solo valore di y. All’inizio, però, la nozione di funzione faceva riferimento – più banalmente – a un’espressione algebrica. Per esempio, un’espressione come

$$ax + b\sqrt{a^2 - x^2}$$

era considerata una funzione, in quanto rappresentava una procedura di applicazione ordinata di un insieme di operazioni algebriche: addizione, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza, radice quadrata.

Il moderno concetto di funzione matematica subì diverse revisioni finché nel 1837 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet ne diede una brillante definizione: y è una funzione di x se a ogni valore di x corrisponde un unico valore di y.[3] Nella definizione di Dirichlet non si pongono restrizioni al modo in cui si realizza tale corrispondenza tra x e y. Cartesio non disponeva di una definizione così libera, ma associando a ogni curva un’equazione fu in grado di poter studiare come una variabile possa assumere diversi valori al variare dell’altra, con la stessa facilità con cui i punti dello spazio si muovono con il trascorrere del tempo.

9. La traiettoria della freccia

Nel 1647 il matematico gesuita Grégoire de Saint-Vincent pose termine alla sua monumentale opera di 1200 pagine dove, in una sua breve sezione, si prendeva in considerazione il paradosso di Zenone cosiddetto «dell'Achille», trattato alla stregua di un problema di somma di una serie geometrica: riusciva così possibile calcolare il tempo esatto e il punto in cui Achille avrebbe raggiunto la tartaruga.[1] Saint-Vincent fu il primo a usare questo metodo, introducendo parimenti l'idea di una connessione tra il concetto di continuo e quello di una divisione infinita della retta dei numeri.[2]

Il calcolo infinitesimale fu inventato in questo ambito, e il moto fu la sua prima applicazione. Ora, il problema del moto è che può variare in velocità e in direzione. Quando non si ha variazione di velocità, quando cioè distanze uguali sono percorse in tempi uguali lungo tutto lo sviluppo del moto, la velocità è data – molto semplicemente – dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo. Ma che cosa succede se la velocità dell'oggetto varia con il tempo?

Grazie alla nuova matematica, cioè alla geometria analitica, da un certo punto in poi fu possibile rappresentare il moto e le modalità di variazione della velocità del moto sia direttamente, mediante le curve di velocità, sia indirettamente, analizzando la pendenza dei diagrammi di spostamento e di velocità. Infatti, si apriva la possibilità di descrivere non soltanto la velocità ma anche l'accelerazione. Perciò nel XVII secolo il problema del moto prese nuove forme: venne, per così dire, aumentata la posta in gioco e alla mente degli studiosi si affacciarono domande che soltanto il calcolo infinitesimale avrebbe potuto risolvere. Le domande erano di questo tipo: quali sono la velocità e l'accelerazione di un corpo animato di moto qualsiasi, in un istante qualsiasi? E ancora: data l'accelerazione di un corpo, qual è la sua velocità in un certo istante e quale sarà la distanza percorsa in un certo intervallo di tempo? Il fatto che le risposte potessero condurre a una nuova formulazione di antiche questioni, frutto di un nuovo modo di vedere i fenomeni naturali e di modellizzarli, era estremamente stimolante per un numero crescente di studiosi della «filosofia naturale».

Non è un caso che il calcolo infinitesimale sia stato scoperto simultaneamente, e indipendentemente, da Leibniz e Newton. (Il primo era «di media statura e snello nella figura, i capelli castani, gli occhi scuri e piccoli ma penetranti», il secondo era «un po' fiacco nella figura e nei modi, tale da non destare grandi aspettative in quelli che non lo conoscessero».)[3] È un segno che i tempi erano maturi per il calcolo infinitesimale.

I matematici del XVII e del XVIII secolo – Newton, Leibniz, Wallis, i fratelli Bernoulli, Eulero, d'Alembert e altri ancora – si erano affrancati dall'ipoteca di rigore matematico posta dal pensiero greco: il rigore, infatti, era il marchio di qualità della pratica matematica fin da quando Euclide aveva stabilito, duemila anni prima, il suo meraviglioso sistema di dimostrazioni sviluppate a partire da pochissimi assiomi. I matematici della nuova scienza si sentivano autorizzati a emanciparsi dal pensiero greco in forza delle loro intuizioni e speculazioni sull'infinitamente grande e sull'infinitamente piccolo. Questa loro disposizione mentale sparse i semi del calcolo infinitesimale assicurando un rapido e robusto sviluppo della pianticella della nuova matematica, che all'occorrenza fece a meno del saldo apparato radicale della logica tradizionale.

Questi matematici inventarono nuove regole e nuove notazioni idonee a manipolare il concetto di infinito, un po' come farebbe un prestigiatore con un mazzo di carte che non si esaurisse mai. Le loro definizioni erano nebulose, i loro metodi sfocati, le argomentazioni logiche presentavano come dei vuoti. Afferma in proposito Tobias Dantzig: «Per troppo tempo l'intuizione era stata coartata nella prigione del rigore postulato dal pensiero greco. Ma adesso le catene sono spezzate, non c'è più nessun Euclide che pretenda di dare la rotta al volo libero e romantico del pensiero».[4] Nel XVII secolo i matematici avevano ormai dimestichezza con gli strumenti di manipolazione dell'infinito e dell'infinitesimo, che posero al servizio della loro intuitiva padronanza del concetto di continuo. I numeri irrazionali erano ormai sdoganati, alla pari dello zero e dei numeri negativi: cominciavano a farsi strada perfino i numeri immaginari. Si affermò, tra l'altro, la notazione letterale; l'algebra, il cui sviluppo era cominciato nel IX secolo, fu rivitalizzata, diventando una disciplina molto promettente: il suo intelligente sistema di notazione simbolica preparò il terreno per l'imminente rivoluzione del calcolo infinitesimale.

Le idee fondamentali del calcolo infinitesimale erano in incubazione da secoli, sin da quando Archimede riuscì a trovare un'eccellente approssimazione del numero trascendente π, nonché a determinare l'area di un segmento di parabola, ossia la figura delimitata da una parabola e da una retta secante; dimostrò che tale area è equivalente ai quattro terzi del massimo triangolo inscritto.

Infatti, se tracciamo il massimo triangolo inscrivibile, vediamo che avanzano due segmenti di parabola, tra il profilo della parabola e il triangolo stesso; su questi due nuovi segmenti di parabola possiamo tracciare due nuovi triangoli massimi: avanzano così quattro nuovi segmenti di parabola; e così via. Mentre procediamo a suddividere ulteriormente l'area del segmento di parabola, consideriamo che ogni nuovo triangolo ha un'area che è un ottavo dell'area del triangolo considerato nel passo precedente. Se indichiamo con A_{sp} l'area del segmento di parabola e con A_t l'area del triangolo massimo inscritto, abbiamo che:

$$A_{sp} = A_t + 2\frac{A_t}{8} + 4\frac{A_t}{8^2} + 8\frac{A_t}{8^3} + \cdots = A_t \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)$$

Iterando n volte questo procedimento di approssimazione delle aree, abbiamo:

$$A_{sp} \simeq A_t \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = A_t \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^{i-1}}$$

Bene, considerando un numero sempre maggiore di suddivisioni del segmento di parabola, Archimede fu in grado di stabilire il valore approssimato della sua area:

$$A_{sp} \simeq \frac{4}{3} A_t$$

Tuttavia Archimede non fece tendere n all'infinito e non affermò che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^{i-1}} = \frac{4}{3}$$

Non lo fece perché non disponeva della nozione di somma di una serie come limite della successione di somme parziali. Archimede tuttavia era consapevole del fatto che quella somma poteva essere via via perfezionata considerando un numero di termini grande a piacere e capì che la differenza tra quella somma e 4/3 si sarebbe sempre più assottigliata con l'aumentare del numero dei termini della serie. Sotto questo aspetto possiamo affermare che Archimede si avvicinò al calcolo infinitesimale più di qualsiasi altro matematico, prima del XVII secolo. Se in questo problema di determinazione dell'area del segmento di parabola Archimede avesse colto l'aspetto di «limite di una successione» e quello di somma di una serie come limite di una successione di somme parziali, avrebbe potuto sciogliere una delle maggiori difficoltà comportate dai paradossi di Zenone: infatti – ebbene, sì – la somma di un numero infinito di termini positivi può essere un numero finito.

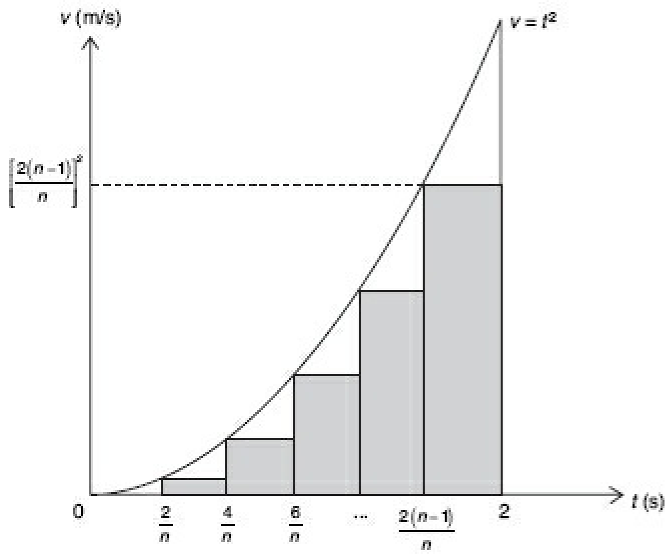
Il concetto di limite ha trasformato il nostro modo di concepire il movimento. Per mettere a fuoco tale concetto, consideriamo un moto particolare, semplice ma non banale, quello per cui la velocità aumenta con il quadrato del tempo, ossia un moto per cui:

$$v = t^2$$

dove v rappresenta la velocità del corpo in movimento (espressa, per esempio, in metri al secondo) e t rappresenta il tempo (che misuriamo in secondi).[5]

La funzione matematica definita da questa equazione è rappresentata nel piano v-t da un ramo di parabola. Le coordinate (t^1, t^2) di un generico punto del grafico non rappresentano la posizione del corpo, ma la corrispondenza fra il numero di secondi t trascorsi dacché il corpo ha cominciato a muoversi e la velocità $v = t^2$ raggiunta al termine dell'intervallo 0-t.

Se consideriamo l'area sottesa dall'arco di parabola fra, per esempio, 0 e 2 s, possiamo in prima battuta approssimarla con la somma delle aree dei rettangoli disegnati nella seguente figura, ottenuti suddividendo l'intervallo 0-2 sull'asse dei tempi in n parti uguali.



Poiché il tempo riportato in ascisse è misurato in secondi e la velocità riportata in ordinate è misurata in metri al secondo, l'area di ciascun rettangolo (e perciò anche la somma delle aree di tutti i rettangoli) sarà misurata in (m/s) · s = m. Questo non è ancora abbastanza per concludere che l'area sottesa rappresenti la distanza percorsa dal corpo nei primi due secondi, ma è un indizio incoraggiante. Vedremo più avanti che l'area complessiva sottesa misura 8/3 e che effettivamente allo scoccare del tempo t = 2 s il corpo si trova a 8/3 m di distanza dalla posizione iniziale.

Per verificare la bontà dell'approssimazione effettuata, calcoliamo l'area totale dei rettangoli sottostanti la curva; se i rettangoli sono n, si può dimostrare che la loro area totale è data dalla formula:[6]

$$A = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

Con semplici passaggi algebrici e utilizzando la formula che dà la somma dei quadrati dei primi k interi otteniamo infine che l'area totale dei rettangoli approssimanti è:[7]

$$A = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

È facile dunque osservare che l'approssimazione dell'area sottesa dall'arco di parabola nell'intervallo 0-2 tende a 8/3 man mano che n aumenta assumendo valori molto alti. Il valore di tale area può dirsi effettivamente uguale a 8/3? Nel moderno calcolo infinitesimale si assume che se per valori di n tendenti a infinito la somma delle aree dei rettangoli approssimanti converge univocamente a un numero reale, allora quel numero rappresenta il valore dell'area. Poiché nel nostro caso la somma delle aree dei rettangoli approssimanti tende, per n che tende a infinito, al valore 8/3, possiamo affermare che 8/3 è veramente il valore dell'area sottesa dalla curva nell'intervallo 0-2.

Nel calcolo infinitesimale il passaggio critico è costituito dalla definizione del limite come valore al quale converge la somma. Proviamo a riassumere: abbiamo cominciato a suddividere l'area sottesa dall'arco di parabola in un certo numero n di aree elementari. Quindi abbiamo immaginato di rendere sempre più fine tale suddivisione. A questo punto ci siamo accorti – cosa che era fuggita ai matematici del medioevo – che la somma di un numero infinito di termini ha il significato di un unico numero reale. Inoltre, implicitamente abbiamo anche capito che l'andamento della curva può essere approssimato dall'accostamento dei lati superiori delle aree elementari, se il numero di queste ultime è molto grande: con questa osservazione siamo pervenuti alla conclusione che dopo due secondi il corpo si è spostato dall'origine di 8/3 m.

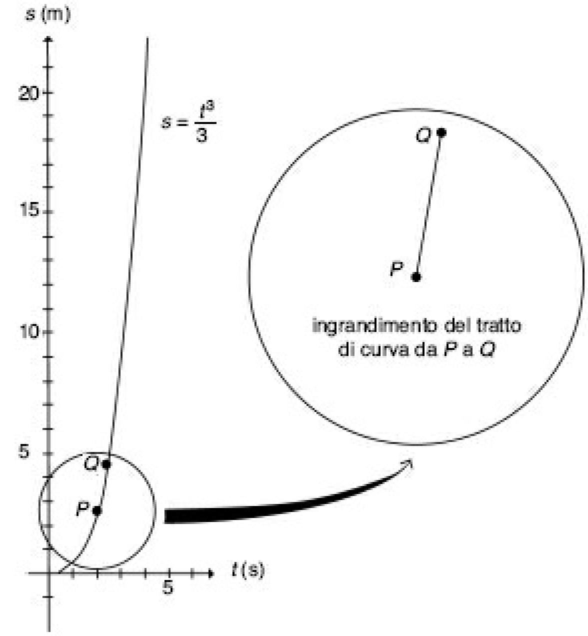
Con considerazioni analoghe potremmo calcolare lo spostamento, per esempio, dopo quattro secondi. Ripetendo i calcoli per altri valori del tempo t, non è difficile verificare che gli spostamenti del corpo sono governati dalla legge:

$$s = \frac{t^3}{3}$$

dove s rappresenta la distanza dall'origine dopo t secondi.

Bene: siamo partiti dalla legge della velocità, $v = t^2$, e siamo pervenuti alla legge dello spostamento $s = t^3/3$. Adesso proviamo a fare il ragionamento inverso: vediamo, a partire dalla legge dello spostamento $s = t^3/3$, quale sia la legge della velocità. Per cominciare, domandiamoci quale, data la legge di spostamento, sia la velocità del corpo dopo due secondi.

Osservando la figura di pagina successiva, vediamo che in ascisse è riportato il tempo, misurato in secondi, e che in ordinate è riportato lo spostamento, misurato in metri. Se consideriamo i due punti P e Q della curva, vediamo che la pendenza nel tratto di curva compreso tra P e Q è data dal rapporto tra la loro distanza verticale (per così dire, la loro differenza di quota) e la loro distanza orizzontale. Ma la distanza verticale è misurata in metri, quella orizzontale in secondi. Dunque la pendenza della curva è misurata in metri al secondo, che è l'unità di misura della velocità. Si affaccia alla mente l'idea che la pendenza della curva dello spostamento in P, che è il punto della curva corrispondente all'istante t = 2, rappresenti la velocità del corpo in tale istante. Non è ancora una prova, ma è un indizio promettente.



Vediamo adesso come si possa determinare questa pendenza. Se ingrandiamo la curva nell'intorno del punto P, vediamo che la curva comincia a prendere l'aspetto di una linea retta: quanto maggiore è l'ingrandimento nell'intorno di P (e quanto più piccolo è il raggio dell'intorno), tanto più il tracciato sembra raddrizzarsi. Le coordinate del punto P, come abbiamo visto con i calcoli precedenti, sono (2, 8/3). Consideriamo ora un numero h positivo molto piccolo: se Q è molto vicino P, la sua ascissa sarà 2 + h, mentre la sua ordinata è facilmente calcolata ponendo t = 2 + h nell'equazione della curva, $s = t^3/3$. Dunque le coordinate dei punti P e Q sono:

$$\begin{cases} P\left(2,\ \frac{8}{3}\right) \\ Q\left(2+h,\ \frac{(2+h)^3}{3}\right) \end{cases}$$

Chiamiamo Δt la differenza tra le ascisse di Q e P e Δs la differenza tra le loro ordinate. Avremo:

$$\begin{cases} \Delta t = h \\ \Delta s = \frac{(2+h)^3}{3} - \frac{8}{3} \end{cases}$$

La pendenza del tratto di curva P-Q è allora:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2+h)^3}{3h} - \frac{8}{3h}$$

Sviluppando l'espressione di elevazione al cubo ed eseguendo la sottrazione troviamo per la pendenza l'espressione: $\Delta s/\Delta t = 4 + 2h + h^2/3$. Come si vede, via via che h diminuisce, cioè via via che Q si avvicina a P, il valore della pendenza si approssima sempre più al valore 4.

Con un piccolo sforzo, e con un pizzico in più di algebra, possiamo trovare il valore della pendenza per qualunque punto della curva dello spostamento. Troveremo che, in generale, la pendenza all'istante t vale t^2. Ma la funzione t^2 è proprio la legge dalla quale abbiamo preso le mosse nello sviluppo del nostro ragionamento, allorché abbiamo postulato che la velocità obbedisse alla legge $v = t^2$. Dunque, dato un moto regolato – per quanto riguarda lo spostamento – dalla legge $s = t^3/3$, la velocità è espressa dalla legge $v = t^2$; viceversa, se la velocità in un certo istante t è $v = t^2$, allora la distanza dall'origine è espressa dalla relazione $s = t^3/3$.

Si noti la stretta relazione di dipendenza tra i grafici che esprimono la velocità e lo spostamento in funzione del tempo rispettivamente: la prima curva è deducibile dalla seconda, e viceversa.

L'idea di rappresentare l'area limitata da una curva come somma delle aree di figure geometriche di area conosciuta risale a Democrito, che visse nel IV secolo a.C. Ci si potrebbe spingere ad affermare che l'idea dell'analisi matematica comincia con il problema di assegnare una misura a una superficie definita geometricamente. In tal caso, il primo tributo di riconoscenza dovrebbe andare a Pitagora, il quale pose le basi per i futuri sviluppi del problema. Ma la verità è che le questioni che stimolavano l'indagine dei matematici del secolo precedente quello di Newton non avrebbero avuto molto senso per i matematici greci. Un greco del IV secolo a.C. non si sarebbe domandato quale fosse il valore dell'area di un cerchio. Aveva – è vero – la nozione dell'area come determinazione numerica dello spazio circoscritto dal cerchio, ma non disponeva degli strumenti per una misurazione rigorosa. Infatti, avrebbe dovuto stabilire quante unità di misura quadrate fossero contenute in un cerchio, ma era consapevole del fatto che le aree del quadrato e del cerchio non sono commensurabili. Perciò la domanda posta sull'area del cerchio sarebbe rimasta senza risposta diretta. In compenso, avrebbe potuto dire che il rapporto fra le aree di due cerchi corrisponde al rapporto dei quadrati costruiti sui rispettivi diametri. Insomma un greco del IV secolo a.C. si sarebbe tenuto alla larga dal problema imbarazzante della commensurabilità dei quadrati e dei cerchi. Avrebbe confrontato quadrati con quadrati e cerchi con cerchi.

La procedura greca per trovare l'area di una figura geometrica qualsiasi consisteva nel ricondurre la misura a quella dell'area di una figura rettilinea equivalente, cioè di una figura geometrica compresa tra rette. Ma ecco che per calcolare le aree delimitate da certe figure geometriche le quali fossero, per così dire, irriducibili – come il cerchio, che non può essere ridotto a un rettangolo – Eudosso inventò nel IV secolo a.C. una procedura che prevedeva approssimazioni successive e sempre più accurate. Questa procedura fu denominata, nel XVII secolo, metodo di esaustione. Non è un metodo nuovo. Nel V secolo a.C. Antifonte sofista, cimentandosi nel valoroso sforzo di quadratura del cerchio, aveva utilizzato un procedimento simile. Molto semplicemente, inscrisse nel cerchio un poligono regolare, cioè un poligono i cui lati sono tutti uguali, dopodiché raddoppiò ripetutamente il numero dei lati: osservò quindi che in corrispondenza di ogni raddoppiamento del numero dei lati la geometria di ogni nuovo poligono si avvicinava sempre più a quella del cerchio.[8] Anche se non sappiamo che cosa Antifonte avesse precisamente in mente, non è difficile congetturare che avrebbe smesso di raddoppiare il numero dei lati nel momento in cui fosse arrivato a determinare l'area di un poligono che potesse giudicarsi un'approssimazione soddisfacente per l'area del cerchio. Tuttavia Antifonte non compì il passo decisivo, quello che l'avrebbe portato a osservare che i valori numerici della successione delle aree così calcolate convergono a un unico numero. Sarà questo il passo decisivo compiuto dal moderno calcolo infinitesimale.

In ogni caso, anche prima dell'invenzione del calcolo infinitesimale, i matematici avevano imparato a usare stratagemmi geometrici per il calcolo non solo delle aree, ma anche dei volumi delle figure regolari. Per esempio, Keplero dimostrò che il volume della sfera si ottiene moltiplicando un terzo del raggio della sfera per l'area della sua superficie. Per arrivare alla dimostrazione del volume della sfera, Keplero suddivise la sfera in un numero molto grande di coni aventi tutti il vertice nel centro della sfera, mentre la loro base giace sulla superficie della sfera.

Per procedere alla quadratura di una figura geometrica piana qualsiasi si presuppone nell'analisi infinitesimale – è questa la sua sottigliezza e la sua novità – che tale figura possa essere considerata il limite al quale converge una successione infinita di poligoni (di dimensioni finite). Se i singoli poligoni costituiscono, certamente, un'approssimazione alla figura geometrica, il limite cui converge la successione delle aree dei poligoni è qualcosa di più di un'approssimazione soddisfacente: il limite è l'area della figura. Dobbiamo questa intuizione al matematico belga Grégoire de Saint-Vincent, il quale fu il primo a far menzione della possibilità che la somma di infiniti termini sia un numero finito. Troviamo queste sue considerazioni in un'opera monumentale dal titolo Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, due volumi di 1200 pagine, pubblicati nel 1647.

Ma il valore limite della nostra somma infinita è mai raggiunto? Questa domanda è all'origine di un vivace dibattito nel XVIII secolo: com'è facile intuire, la domanda rimanda alla questione di fondo del paradosso «dell'Achille» formulato da Zenone. Detto in breve, la risposta è «no»: la somma non raggiunge tale limite. Dunque il paradosso del movimento rimane.

Quando Bonaventura Cavalieri si cimentò con il paradosso di Achille e della tartaruga, trovò anche un modo di manipolare l'infinito. Nel 1629 escogitò un'abile procedura per schivare le difficoltà sollevate da Zenone, grazie alla quale poteva generalizzare alcune intuizioni di Archimede. Possiamo immaginarcelo mentre si domanda a voce alta: «Si pensi a un solido come se fosse costituito dall'accostamento di tante sue sezioni parallele, sottili come le pagine di un libro: non sarà forse il volume totale molto vicino alla somma dei volumi delle singole pagine?». Cavalieri osservò inoltre che l'area tracciata da un segmento che si sposti in un piano non è altro che la lunghezza del segmento stesso moltiplicata per la lunghezza della curva tracciata dal punto di mezzo del segmento, purché l'orientazione del segmento sia sempre mantenuta perpendicolare alla traiettoria dello spostamento. Consideriamo per esempio un segmento di lunghezza r e facciamolo ruotare intorno a uno dei suoi estremi: otterremo un cerchio di raggio r, e il punto di mezzo del segmento avrà tracciato una traiettoria circolare di raggio r/2. Bene, in base al principio stabilito da Cavalieri, l'area «spazzata» dal segmento è data dalla lunghezza del segmento moltiplicata per lo sviluppo della traiettoria del punto di mezzo: $r \cdot 2\pi \cdot (r/2) = \pi r^2$, che è, appunto, l'area di un cerchio di raggio r. Meraviglioso! Manca la dimostrazione, ammettiamolo, eppure la soluzione è vera, oltre che intuitiva.

Facendo un balzo all'indietro nel XIV secolo, Nicola Oresme aveva già stabilito una relazione tra velocità e spostamento di un mobile, riferendosi all'area sottesa dalla curva di velocità, più o meno come si è fatto noi nelle pagine precedenti. Così Oresme accennava, grosso modo, a quell'operazione che nel calcolo infinitesimale prenderà il nome di integrazione.

Anche Galileo pervenne a considerazioni di carattere infinitesimale, proprio all'inizio dei suoi Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze. Arrivò a sfiorare due idee che costituiscono i cardini del calcolo infinitesimale, quella di infinitesimo e quella di continuo, ma ben presto se ne sbarazzò: queste idee risultavano incomprensibili alla luce della molteplicità dei paradossi che scaturiscono dall'infinito. Tornerà però a fare ricorso a questi concetti nella terza e nella quarta giornata dei suoi Discorsi.

Ancora nel XVII secolo, Evangelista Torricelli mostrò in maniera decisamente brillante come fosse possibile tracciare una figura infinitamente alta e tuttavia di area finita.[9] Mostrò anche che facendo ruotare il ramo di un'iperbole intorno a uno dei suoi asintoti si ottiene un solido di rotazione la cui superficie è infinita, ma il cui volume è finito. A quel tempo un'affermazione del genere poteva sembrare paradossale, perché sarebbe come dire che è possibile pitturare una superficie infinita versandovi una quantità finita di vernice. Gli studenti di calcolo infinitesimale conoscono oggi il trucco per «spalmare la vernice». In ogni caso, la brillante dimostrazione di Torricelli viene a proposito per dare una risposta al paradosso di Zenone, quello della dicotomia: sì, una somma di infiniti termini può avere un valore finito.

Tornando a Galileo, vediamo come affrontò il problema di determinare la velocità di un mobile che si sposti con una legge qualsiasi $s = s(t)$. Per calcolare la velocità che, se il moto è qualsiasi, varia da istante a istante, Galileo considerò il rapporto tra lo spazio Δs percorso nel tempuscolo Δt e il tempuscolo stesso. Quindi osservò che il risultato dipende dalla durata di Δt.[10] Calcolando il rapporto che dà la velocità media nell'intervallo Δt, $\Delta s/\Delta t$, per Δt sempre più piccolo, arrivò a determinare una successione di velocità medie, i cui termini si avvicinano sempre più a un valore specifico della velocità istantanea. Si veda l'esempio riportato nella tabella seguente che fa riferimento allo spostamento di un mobile governato dalla legge $s(t) = t^2$. Come si vede, per calcolare la velocità istantanea nell'istante $t = 1$, si considera dapprima l'intervallo di tempo 1-2 s, quindi si procede a dimezzare progressivamente tale intervallo.

Tempo			**Spazio**			**Velocità**
t_1	t_2	Δt	s_1	s_2	Δs	$v=\Delta s/\Delta t$
1	2	1	1	4	3	$\frac{3}{1}$
1	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}\Big/\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
1	$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}\Big/\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$
1	$1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{81}{64}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{17}{64}\Big/\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$

Si ottiene allora una successione di valori della velocità media, riferiti a intervalli Δt sempre più piccoli:

$$\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \ldots$$

Questa successione, comfe facile verificare, converge al valore 2. Newton osserverebbe che, se gli intervalli Δt continuano a rimpicciolirsi indefinitamente, la successione che ne risulta converge al valore della velocità istantanea nel tempo t, che è dunque il limite cui tende la velocità media nell'intorno del tempo t, per valori di Δt sempre più piccoli. Intuitivamente non c'è niente di sbagliato in questa definizione di velocità, ma che dire del rigore?

Per fondare le nostre conoscenze su basi più solide abbiamo bisogno di un criterio che stabilisca quanto piccolo dev'essere l'intervallo di tempo Δt e con quale approssimazione dobbiamo avvicinarci a quello specifico valore limite che chiamiamo velocità istantanea. Newton, che pure non disponeva degli assiomi e dei criteri stabiliti da definizioni aritmetiche rigorose che abbiamo noi oggi, riuscì tuttavia a formulare un modello straordinariamente efficace per descrivere il moto non uniforme.

I problemi del moto sono strettamente intrecciati con la questione del rapporto tra lo spazio e il tempo, tanto da non poter prescindere dal concetto di infinito: in particolare, non è possibile prescindere dai paradossi di Zenone. La matematica del moto richiede di comprendere il concetto di infinito, una nozione che da sempre si è trovata, in qualche misura, in contrasto con il sapere intuitivo dell'uomo. La somma di un numero infinito di termini può essere finita? Egualmente sembrano assurde la nozione di punto adimensionale e quella di linea senza spessore: sono o non sono finzioni concepite dalla mente di un matematico? Zenone sapeva intuitivamente che i suoi argomenti erano filosoficamente fondati, anche se le regole della logica non erano ancora state inventate. In effetti, potrebbe anche aver previsto che il concetto di infinito sarebbe stato un giorno sottoposto a un accurato controllo matematico, ma era abbastanza saggio per sapere che comunque l'infinito sarebbe stato percepito come una stonatura. Zenone prende una freccia dalla sua faretra, la scocca dal suo arco, quindi ci chiede di fermare il tempo per esaminare una freccia che adesso è ferma, senza distruggere il volo. Per un matematico fermare il tempo e avere un quadro astratto della freccia in volo è una cosa facile, così come è naturale credere che la freccia così concepita sia, di fatto, ancora la stessa freccia che è stata scoccata dall'arco. Ma il matematico, molto semplicemente, pone un'astrazione matematica al posto dell'impressione mentale di una freccia arrestata nel suo volo (un'immagine mentale che può anche essere visualizzata con chiarezza, come su uno schermo): ma la freccia che parte dall'arco e che gradualmente si avvicina al bersaglio non è la freccia reale.

Il paradosso sta tutto nell'uniformità del flusso del tempo. Tuttavia dobbiamo considerare tale uniformità come un'ipotesi, piuttosto che assumerla come una verità. Non è compito della matematica verificare se il tempo è veramente continuo o no: per la matematica è irrilevante. Quando avremo accettato e ben capito la più aggiornata definizione di limite fornita dall'analisi matematica, non per questo saremo venuti a capo del paradosso della dicotomia. Proviamo allora, alla luce di queste considerazioni, a riconsiderare i paradossi di Zenone in chiave matematica.

1 – Per quanto sia espresso nel preciso linguaggio della matematica, il PARADOSSO DELLA DICOTOMIA è veramente una conseguenza della natura del moto, che riguarda fenomeni fisici e il modo in cui funziona la nostra mente, non è questione di matematica.

La spiegazione matematica del paradosso della dicotomia sta tutta nel dimostrare che la serie infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

converge al valore 1 per n che tende all'infinito. Per dimostrarlo, scriviamo la somma dei primi n termini della serie:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Si ha allora:

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

Sottraendo membro a membro le due precedenti espressioni si ottiene:

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Cioè:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Con l'aumentare di n, S_n si approssima sempre più al valore 1. Abbiamo dunque trovato, con ogni evidenza:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

È strano: dopo tanto rigore nell'esecuzione di tutte le operazioni algebriche, senza aver trascurato alcun dettaglio, accettiamo d'un tratto che la serie converga a 1, in virtù del rimpicciolimento di 1/(2n). Implicitamente stiamo già facendo ricorso alla nozione di limite.

2 – Veniamo adesso al PARADOSSO DELL'ACHILLE. Tutto sta a vedere come si debba interpretare la gara. Nel calcolo infinitesimale l'attenzione è focalizzata sul fatto che Achille «raggiunge» la tartaruga. Si osservi che «raggiungere» è diverso da «superare». Infatti, il superamento della tartaruga può essere calcolato algebricamente, come vedremo subito dopo; invece la descrizione del raggiungimento richiede che si metta a punto un modello che includa la nozione matematica di limite. Siano questi, a titolo di esempio, i dati del problema:

– velocità di Achille: v_A = 10 km/h
– velocità della tartaruga: v_T = 1 km/h
– vantaggio concesso alla tartaruga: 9 km

Analizziamo allora alcuni «passi» di questa corsa:

a) Quando Achille raggiunge i 9 km che inizialmente lo separavano dalla tartaruga, questa – la cui velocità è un decimo di quella di Achille – si sarà portata avanti di 0,9 km: pertanto in quel momento la tartaruga dista dall'origine, cioè dalla linea di partenza, 9 + 0,9 = 9,9 km. Riassumendo, chiamando s_A e s_T, rispettivamente, le distanze di Achille e della tartaruga dall'origine, alla fine di questo passo avremo:

$$\begin{cases} s_A = 9\ \text{km} \\ s_T = 9{,}9\ \text{km} \end{cases}$$

b) Nel tempo impiegato da Achille per coprire i 0,9 km che alla fine del passo a) lo separavano dalla tartaruga, questa sarà avanzata di ulteriori 0,09 km. Riassumendo, alla fine di questo secondo passo della gara si avrà:

$$\begin{cases} s_A = 9{,}9\ \text{km} \\ s_T = 9{,}99\ \text{km} \end{cases}$$

(...)

n) Alla fine dell'nesimo passo della gara, la situazione sarà questa:

$$\begin{cases} s_A = 9{,}99...9 \text{ km} \\ s_T = 9{,}999...9 \text{ km} \end{cases}$$

Al termine dello nesimo passo della gara, dunque, a destra della virgola decimale nell'espressione di s_T si contano n cifre «9».

(...) Se la gara continua indefinitamente, la tartaruga si troverà alla distanza

$$s_T = 9{,}99...$$

dalla linea di partenza. I puntini alla fine di quest'ultima espressione indicano che a destra della virgola decimale c'è un numero infinito di cifre «9».

Osserviamo che se, dopo n passi, nell'espressione $s_T = 9{,}999...9$ si contano a destra della virgola decimale n cifre «9», con l'aumentare di n l'espressione 9,99... rappresenta un numero sempre più vicino a 10. Possiamo allora affermare che se il numero di cifre «9» a destra della virgola decimale è infinito allora:

$$s_T = 9{,}99... = 10$$

Possiamo porre questa uguaglianza per definizione, perché una successione infinita di 9 dopo la virgola non è mai stata definita altrimenti.

Infatti:

$$9{,}99... = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$$

converge al valore 10. A questo punto si ha, inoltre: $s_A = s_T$.

Vediamo adesso la soluzione algebrica del paradosso di Achille e della tartaruga. In base ai dati del problema – sempre quelli – possiamo esprimere la distanza s_A coperta da Achille al tempo t e quella s_T coperta dalla tartaruga in questo modo:

$$\begin{cases} s_A = v_A \cdot t = 10t \\ s_T = 9 + v_T \cdot t = 9 + t \end{cases}$$

Diamo qui per scontato che Achille effettivamente raggiunga la tartaruga. Ponendo s_A =

s_T, siamo in grado di calcolare il tempo t in cui ciò avviene:

$$10t = 9 + t$$

Dunque, facendo i conti, Achille raggiunge la tartaruga nel tempo t = 1, cioè dopo un'ora dall'inizio della corsa. Ponendo il valore t = 1 nell'espressione di s_A o di s_T (è lo stesso) sappiamo anche dove Achille raggiunge la tartaruga: a 10 km dalla linea di partenza.

I matematici solitamente, quando sono chiamati a sciogliere il paradosso di Achille, forniscono la soluzione algebrica. Ma il problema è: come può Achille svolgere un numero infinito di «passi» (nel senso chiarito sopra) in un tempo finito? È una difficoltà, questa, che può essere superata a patto che non si faccia confusione tra movimento nello spazio e movimento del tempo (nel senso che il tempo trascorre, dunque si muove).

3 – Anche il PARADOSSO DELLA FRECCIA richiede che si compia l'operazione di passaggio al limite: solo così, infatti, si perviene alla definizione matematica della velocità istantanea, alla quale abbiamo accennato nelle pagine precedenti, a proposito di Galileo. Considerata nell'ambito del calcolo infinitesimale, la velocità istantanea v è una derivata dello spostamento s: la derivata, in questo caso, è ottenuta rapportando la variazione dello spostamento Δs (s è la variabile dipendente) alla variazione del tempo Δt in cui tale spostamento si compie, per valori Δt tendenti a zero (t è la variabile indipendente). Il modello al quale dobbiamo fare riferimento nel considerare il paradosso della freccia è dunque quello per cui ciascun punto della traiettoria della freccia corrisponde al limite di una successione di numeri razionali nella retta dei numeri: dunque il percorso della freccia si svolge regolarmente nella continuità dello spazio e nella continuità del tempo. In effetti, questo modello presuppone, del tutto correttamente, che sia possibile avvicinarsi arbitrariamente a un qualunque numero reale della retta dei numeri tramite una successione convergente di numeri razionali.

La comprensione della continuità, tuttavia, è spesso fallace. Leibniz pensò che potesse dirsi continuo (e completo, cioè senza «vuoti») un insieme di numeri tale che fra due qualsiasi elementi fosse sempre individuabile un terzo elemento appartenente ancora a tale insieme. In base a questo criterio l'insieme dei numeri razionali dovrebbe essere continuo; ma non lo è se lo includiamo nell'insieme dei numeri reali perché manca, per esempio, il numero reale $\sqrt{2}$.

4 – Per quanto riguarda, infine, il PARADOSSO DELLO STADIO, osserviamo che, in ultima analisi, il paradosso ci rende consapevoli del fatto che in uno spazio continuo il moto deve essere continuo. La matematica può darci un'ottima definizione di ciò che significa «spazio continuo», ma non può decidere se lo spazio è continuo o meno, né può decidere se il movimento in quello spazio è continuo o no. Come ebbe a osservare lo storico della matematica Carl Boyer: «I paradossi di Zenone sono conseguenza del fallimento dei tentativi di appurare tale continuità».[11]

Grégoire de Saint-Vincent ridusse il paradosso di Achille a quello di una serie infinita di termini, formulando una spiegazione che si accorda parecchio al nostro modo di ragionare. Cominciò con il domandarsi che cosa avverrebbe se nell'analisi della gara tra Achille e la tartaruga si lasciasse che lo spazio fosse suddiviso indefinitamente: in questo caso la gara potrebbe essere modellizzata facendo ricorso al concetto di serie geometrica infinita.[12] Dunque secondo de Saint-Vincent il paradosso si riduce al problema di sommare gli infiniti termini di una serie. Il suo ragionamento si basava: a) sul rapporto di proporzionalità sussistente tra le velocità dei due concorrenti; b) sul concetto di serie geometrica. Calcolando il punto in cui Achille avrebbe raggiunto la tartaruga, de Saint-Vincent prese in esame la fenomenologia della gara ma non l'intima ragione per cui si perveniva a quel risultato. Non c'è dubbio che altri modelli matematici possono determinare esattamente il punto in cui Achille raggiunge la tartaruga, ma de Saint-Vincent fu il primo a utilizzare una serie geometrica per individuare il tempo e il luogo esatto in cui sarebbe avvenuto il sorpasso.[13] Ma, ancora una volta, rimane il problema: com'è che ciò avviene, dal momento che il paradosso di Zenone ci dice che il sorpasso non può avvenire? Dobbiamo essere in grado di spiegare il fenomeno senza ricorrere a un modello che può anche non rappresentare accuratamente ciò che osserviamo. Dopotutto, Achille non è un punto, e neanche la tartaruga.

Il fantasma di Zenone fece una sua apparizione in epoca moderna, nel 1734, nella persona di George Berkeley, vescovo anglicano di Cloyne, nella contea di Cork, Irlanda. Secondo Berkeley, la nuova matematica, cioè il calcolo infinitesimale, aveva fallito l'obiettivo di formalizzare i concetti intuitivi di continuità, e le basi sulle quali fondava la sua dottrina erano tutt'altro che salde. È significativo in proposito il sottotitolo del suo saggio: L'analista. Ovvero discorso indirizzato a un matematico infedele, nel quale si esamina se l'oggetto, i principi e l'inferenza della moderna analisi [si intenda qui il calcolo infinitesimale] siano più distintamente concepiti o evidentemente dedotti che non i misteri della religione o gli oggetti della fede. «Togli prima la trave dal tuo occhio e poi ci vedrai bene per togliere la pagliuzza dall'occhio del tuo fratello». L'argomento principale verteva sulla giustificazione fornita da Newton, giudicata da Berkeley non soddisfacente, del limite del rapporto tra due grandezze che tendono entrambe a zero. Con questo concetto – affermava Berkeley – si perde la cognizione delle sottili differenze e delle difficoltà connesse con i concetti di infinito e continuità. Secondo Berkeley, zero diviso zero ha tutta l'aria di una contraddizione senza senso.

Aveva ragione il vescovo, proprio come aveva ragione Zenone. L'intuizione va bene, ma per quelli che hanno buona intuizione dei problemi: Eulero, Fermat, Newton e Leibniz. Il pericolo era che qualcosa di subdolamente disruptivo potesse presentarsi al cancello d'ingresso del calcolo infinitesimale sotto le mentite spoglie di erede legittimo di un teorema dimostrato. Effettivamente, alla fine del XVIII secolo non era difficile imbattersi in proposizioni matematiche contraddittorie. Eppure le applicazioni della geometria analitica e del calcolo infinitesimale erano in piena espansione: di fatto, miglioravano la vita degli uomini e la conoscenza del mondo reale, nonostante le incongruenze che talvolta si insinuavano attraverso i passaggi incustoditi della ragione. A parte queste incongruenze, la nuova matematica fiorì e si fortificò per più di due secoli, se prescindiamo dalle sue non rigorose basi logiche, con veramente pochi errori.

La matematica si sviluppò di pari passo con l'emergere di necessità pratiche: furono problemi pratici riguardo al movimento quelli che stimolarono lo studio di questioni astratte che investivano i concetti di velocità, di tangente a una curva, di valor massimo e che suggerivano il modo di calcolare la lunghezza di una curva. A loro volta, le risposte astratte, anche quelle interlocutorie, comportavano lo sviluppo di intuizioni fondamentali per relazionarsi scientificamente con i problemi pratici. Nello studiare l'angolo di rifrazione della luce che attraversa una lente – il che richiede che si conosca la tangente alla superficie lenticolare – Fermat, Newton e Huygens trovarono nel calcolo infinitesimale un potente alleato. Altre applicazioni della nuova matematica riguardarono l'arte della guerra: per esempio, come determinare l'angolo di tiro che rende massima la gittata di un cannone. In questo periodo, precedente l'Era dei Lumi, Eulero e Lagrange impostarono le loro equazioni d'onda per la propagazione del suono. Daniel Bernoulli analizzò la tonalità degli strumenti a fiato. Contemporaneamente Jean-Philippe Rameau, organista e compositore di partiture per clavicembalo e flauto, si interessò in prima persona degli aspetti matematici della produzione dei suoni. Dopo che Bach adattò il principio del concerto alle sue composizioni per pianoforte e orchestra, l'interesse per nuovi strumenti musicali incoraggiò lo studio della meccanica delle corde vibranti. Così nel 1747 e nel 1748 Eulero e d'Alembert offrirono numerosi contributi alla teoria matematica della musica, studiando la dinamica delle corde vibranti di diversi strumenti musicali, nonché la propagazione delle onde sonore generate da superfici vibranti, per esempio le onde sonore provocate dalla percussione di un tamburo.

Non è azzardato affermare che la geometria analitica e il calcolo infinitesimale hanno contribuito decisivamente al progresso dell'architettura, dell'astronomia, dell'artiglieria, della carpenteria, della cartografia, della meccanica celeste, della chimica, dell'ingegneria civile, dell'orologeria, dell'idrostatica, dell'idrodinamica, della musica, dell'ottica, della fluidodinamica, delle costruzioni navali, della termodinamica, del magnetismo, della scienza dei materiali, della navigazione... (l'elenco non è completo). Geometria analitica e calcolo infinitesimale insieme hanno operato una delle più grandi rivoluzioni nella storia della matematica. Eppure il paradosso del moto non ha ancora trovato una risposta.

Quando Newton con una bella metafora riconobbe il suo debito di riconoscenza ai giganti sulle cui spalle aveva avuto il privilegio di salire («se ho visto più lontano è perché stavo sulle spalle di giganti»), probabilmente si riferiva a Cartesio, che gli aveva preparato la strada con la sua geometria analitica; a Evangelista Torricelli, Bonaventura Cavalieri, Gilles Personne de Roberval, Pierre de Fermat, Blaise Pascal e John Wallis che, indipendentemente l'uno dall'altro, avevano fatto ricorso al metodo di esaustione riprendendo il lavoro che Archimede aveva dedicato al calcolo dell'area racchiusa dalle spirali; si riferiva ancora a Grégoire de Saint-Vincent, al suo maestro Isaac Barrow e ad altri il cui nome si è perso nelle pieghe della storia. Ma in testa a questo elenco dovevano figurare uomini come Keplero, Galileo e Copernico, i quali gli illuminarono la strada che l'avrebbe portato alla più celebre delle sue conquiste, l'associazione della legge dell'inverso del quadrato – necessaria per la descrizione cinematica del moto dei pianeti –

alla forza esercitata dalla gravità. È appena cominciato, proprio di qui, il percorso di conoscenza della natura del movimento.

10. Avanti verso il secolo dei Lumi

Sessant'anni dopo l'Amleto di Shakespeare, Newton concepì la legge di gravitazione universale, che avrebbe avuto una ricaduta notevolissima nel progresso della fisica e che – soprattutto – tolse di mezzo l'idea che il destino dell'uomo dipendesse dal movimento degli oggetti celesti. A questo punto, grazie a Newton, si stabilisce un collegamento tra fenomeni diversi come la caduta di una mela dall'albero e l'attrazione tra i pianeti. Non c'è traccia invece di un nesso tra il destino dell'uomo e i movimenti osservabili nella volta stellata.

Nel tempo in cui Amleto metteva piede sulle scene, fu tradotta in inglese la Bibbia cosiddetta di Re Giacomo, dove si legge:[1]

> Il sole sorge e il sole tramonta, si affretta verso il luogo da dove risorgerà. Il vento soffia a mezzogiorno, poi gira a tramontana; gira e rigira e sopra i suoi giri il vento ritorna. Tutti i fiumi vanno al mare, eppure il mare non è mai pieno: raggiunta la loro mèta, i fiumi riprendono la loro marcia.

Secondo Aristotele, tutto nell'Universo tende a riportarsi a un «luogo naturale», se mosso. Invece alla fine del XVIII secolo si cominciò a pensare che il movimento dei sistemi materiali fosse naturalmente regolato da una proprietà intrinseca dei materiali stessi, la gravità: due oggetti posti a una certa distanza l'uno dall'altro si attraggono in virtù del fatto che sono costituiti da una certa quantità di materia. Tale attrazione dipende dalla loro distanza e dalla loro massa. Newton pensò che le forze gravitazionali dipendessero dalle relazioni tra i diversi oggetti. Un corpo isolato non possiede alcuna «forza» gravitazionale intrinseca, ma se gli si avvicina un secondo corpo, esercita una forza su quello; a sua volta il secondo corpo esercita una forza sul primo.

Il XVI secolo aveva fatto fatica a formulare leggi universali: la stessa difficoltà incontrata da Aristotele molti secoli prima. Ma nel XVIII secolo il punto di vista prevalente tra gli scienziati era che l'Universo fosse regolato da un insieme di leggi. Eppure – diversamente da quello che si riscontra nel moto dei pianeti – le leggi che presiedono ai fenomeni biologici dipendono da troppe variabili perché sia possibile darne una spiegazione perfetta. Se una mela cade da un albero, è facile constatare come essa si attenga alle semplici leggi del moto formulate da Newton; tuttavia se consideriamo la mela in sé, ci appare come una congerie estremamente complessa di molecole tenute insieme da un sistema intricato e numeroso di forze di attrazione atomica.

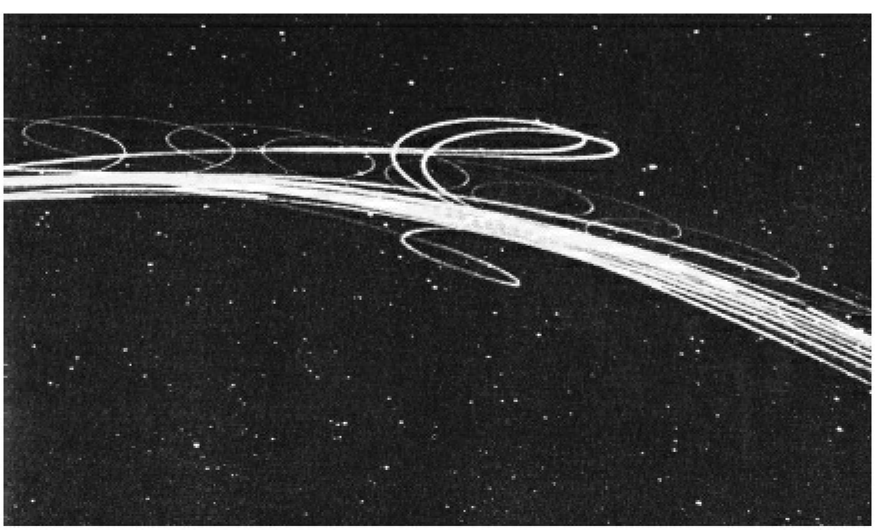
Nel Paradiso perduto di Milton, Dio manda l'arcangelo Gabriele in paradiso, per ammonire Adamo e, anche, per scoprire l'identità di Satana. L'arcangelo viene invitato a tavola, imbandita da Eva con squisite bevande, frutta e pietanze fra le più ricercate del paradiso. Nel frattempo Adamo interroga l'arcangelo sul mondo, sulla sua origine e sul moto dei pianeti. Spiega l'arcangelo:[2]

... il cielo

è come il libro che Dio ci ha posto dinanzi
dove tu vuoi leggerne le opere meravigliose e apprendere le sue stagioni,
le ore, o i giorni, o i mesi, o gli anni:
ma arrivare a comprendere se si muovono i cieli o si muove la terra
poco importa
[...]
quindi, quando gli uomini arrivano a farsi un modello del cielo
per calcolare la posizione delle stelle e per trovare il modo di controllare
la potente macchina del mondo, per comporlo e scomporlo riuscendo
a salvare le apparenze, per congegnare una sfera
comprendente un deferente centrato sul quale sono tracciati circoli eccentrici,
cicli ed epicicli, orbite su orbite...

Milton portò a termine la stesura del Paradiso perduto poco prima della Grande peste che colpì Londra nel 1665. Contemporaneamente Newton lasciava Cambridge per rifugiarsi nella casa dove aveva trascorso gli anni giovanili, nel villaggio di Woolsthorpe: qui scoprì, tra le altre cose, la legge di gravitazione universale, nonché il modo di comporre il movimento dovuto all'azione esercitata dalla gravità con lo stato di quiete, o il movimento rettilineo uniforme, dovuto all'inerzia (lo stato d'inerzia è quello che caratterizza tutti i corpi in assenza di forze agenti). Così Newton riuscì a dar conto insieme sia del moto orbitale dei pianeti, sia di quello di caduta libera, in verticale, della mela, quando venga meno il sostegno dell'albero.

Per vedere i pianeti muoversi intorno al Sole lungo orbite ellittiche, dovremmo poterlo osservare da una posizione solidale con il Sole; non solo: il nostro punto di vista dovrebbe trovarsi abbastanza in alto, al di sopra del centro del Sole. Ma com'è possibile concepire che i pianeti possano spostarsi con velocità areolare costante lungo orbite ellittiche, se le loro traiettorie nel cielo sembrano piuttosto le tracce di una fune con la quale un cowboy voglia prendere al laccio le stelle? Si veda la foto a lunga esposizione delle traiettorie dei pianeti, riportata qui sotto: la foto è stata scattata al planetario di Monaco di Baviera, nel corso di una simulazione del movimento dei pianeti che abbracciava un periodo di venti anni.



Archivio Deutsches Museum, Monaco.

D'altra parte, se noi consideriamo come sistema di riferimento la Terra piuttosto che il Sole, o qualunque altro riferimento dell'Universo, non per questo la descrizione del moto dei pianeti sarà meno rigorosa. Tolomeo aveva ragione, non meno di Copernico: infatti, da ciascuno dei due modelli, quello tolemaico e quello copernicano, possiamo trarre conseguenze corrette. E il modello eliocentrico copernicano non solo è più semplice dell'altro che comporta strane evoluzioni dei pianeti ma è anche spiegato da una legge universale. Se assumiamo il riferimento solare e se le traiettorie dei pianeti sono ellissi, possiamo spiegare questo moto per mezzo di una semplice legge che combina l'azione dell'attrazione gravitazionale con il movimento inerziale, cioè con il movimento che i pianeti avrebbero se non fossero soggetti all'attrazione gravitazionale.[3] Ora, la massa di un corpo è indipendente dalla sua posizione e il moto inerziale, di per sé, prescinde dalla sua vicinanza o lontananza dal campo gravitazionale di un altro corpo. Questo significa che l'accelerazione (cioè la rapidità di variazione di velocità) di un determinato corpo dipende soltanto dalle forze che agiscono su di esso.[4] Dunque la determinazione del moto dei pianeti è un problema prettamente matematico, dove occorre mettere in conto una causa agente che è data dalla meravigliosa legge di gravitazione universale, la legge dell'inverso del quadrato formulata da Newton.[5]

Quando parliamo della Terra che ruota intorno al Sole, oppure del Sole che ruota intorno alla Terra, parliamo della traiettoria del moto, e non della legge del moto. Se cambiamo il punto di vista dal quale osserviamo due oggetti in moto l'uno rispetto all'altro, vediamo due traiettorie diverse: una traiettoria vale l'altra, ma una volta che abbiamo scelto a quale pianeta o a quale stella è solidale il nostro sistema di riferimento, la traiettoria sarà univocamente determinata dalla legge del moto. Se la legge dell'inverso del quadrato funziona per lo studio della caduta libera di una mela o quello della traiettoria di un proiettile sparato da un cannone, ci aspettiamo che funzioni altrettanto bene applicata allo studio del moto dei pianeti o a quello della Luna. Certo, potremmo adottare il sistema di riferimento terrestre, che è in accordo con le osservazioni, e applicare la legge dell'inverso del quadrato esprimendo i parametri del movimento del Sole e dei pianeti rispetto alla Terra, ma i calcoli richiederebbero laboriose trasformazioni delle coordinate e la meravigliosa semplicità della legge di Newton scomparirebbe, sopraffatta da una geometria inutilmente complicata. Da questo punto di vista possiamo affermare che aveva ragione Copernico, se avere ragione significa escogitare qualcosa di ingegnoso ed elegante.

Ci si può domandare come Newton sia pervenuto alla sua legge e perché fra le tante ipotesi possibili prese in considerazione quella che la forza di attrazione fosse inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. Però, a ben pensarci, il «quadrato» non è una novità. Pitagora aveva fatto ricorso ai quadrati per esprimere la sua ben nota relazione tra i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Anche Apollonio, per descrivere le caratteristiche geometriche delle sezioni coniche, impiegò il concetto di quadrato. I matematici del Merton College usarono anch'essi il concetto di quadrato nel trarre le conseguenze dell'applicazione del loro teorema dell'accelerazione (fu questa la prima enunciazione di una legge del moto in termini matematici). Keplero ricorse alla nozione di quadrato nell'enunciato della sua terza legge, quella che mette in relazione il periodo di rivoluzione di un pianeta con la sua distanza media dal Sole.

In una pubblicazione del 1686, Leibniz mise in rilievo che l'energia di un corpo in movimento è proporzionale al quadrato della velocità: dunque l'energia cinetica non aumenta linearmente con la velocità, come aveva ritenuto Cartesio. L'idea di Leibniz fu scartata, molto imprudentemente, dalla comunità scientifica di allora, finché fu riportata alla luce, nel 1746, dalla brillante, bella e ricca Gabrielle-Émilie de Breteuil, marchesa du Châtelet. Il suo lavoro consistette nell'approntare un'interpretazione unificata dei lavori di Cartesio, Leibniz e Newton. Ella allestì uno splendido laboratorio nel quale si propose di verificare le conseguenze fisiche della trattazione matematica dei fenomeni e dimostrò con un esperimento che l'energia cinetica è proporzionale al quadrato della velocità. Ecco la sua dimostrazione.

– Fece cadere consecutivamente una sfera di bronzo da tre altezze h_1, h_2, h_3, in rapporto fra loro come 1 : 4 : 9.
– Sappiamo che la velocità di un grave che cade liberamente dall'altezza h è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza di caduta:[6]

$$v = \sqrt{2gh}$$

Dunque cadendo al suolo dalle altezze h_1, h_2, h_3, le velocità della sfera di bronzo sono fra loro in rapporto come le radici quadrate di h_1, h_2, h_3, cioè come 1 : 2 : 3.

– La marchesa du Châtelet verificò che la sfera di bronzo, cadendo su un letto d'argilla cedevole imprimeva nel corso delle tre fasi dell'esperimento tre crateri le cui profondità sono fra loro in rapporto come 1 : 4 : 9.
– La marchesa fece l'ipotesi che le profondità dei crateri fossero proporzionali all'energia cinetica.
– Allora i rapporti dell'energia cinetica (1 : 4 : 9) risultano proporzionali ai quadrati dei rapporti delle velocità (1 : 2 : 3), e l'energia cinetica è veramente proporzionale al quadrato della velocità.

Nel XVII secolo il moto della Luna e quello dei pianeti, nonché lo studio della caduta libera dei gravi sulla Terra e quello dei proiettili sparati dai cannoni (che in Inghilterra furono usati per la prima volta nella battaglia di Calais, nel 1347, nel corso della Guerra dei cent'anni) destavano il più vivo interesse. Tuttavia a quel tempo non si sapeva ancora che cosa precisamente facesse sì che i pianeti gravitassero intorno al Sole su orbite ellittiche, con il Sole in uno dei due fuochi. Certo, si parlava di «venti d'etere» o anche della teoria cartesiana dei vortici, che ipotizzava un Universo riempito d'un fluido invisibile, i cui vortici turbinosi trascinerebbero i pianeti tutt'intorno. Secondo Cartesio, tutto lo spazio è riempito di materia, e le sue particelle si muovono in linee chiuse. La meccanica di Cartesio è fondamentalmente cinematica, cioè si riduce allo studio del movimento dei corpi a prescindere dalle cause agenti che imprimono loro accelerazione o decelerazione. All'inizio, la sola «forza» alla quale si facesse riferimento era ciò che oggi chiamiamo «quantità di moto», data dal prodotto della massa per la velocità: la forza nel senso moderno del termine è in realtà la rapidità con la quale la quantità di moto varia nel tempo. La quantità di moto misura la capacità di un corpo di modificare il movimento di altri corpi e, in un sistema isolato, è costante: se due corpi in movimento vengono a contatto, la quantità di moto complessiva è la stessa, prima e dopo l'urto.

Passiamo adesso al XVIII secolo. Herbert Turnbull, matematico e studioso di Newton, ci racconta questa storia deliziosa, ancorché fantastica, sul giovane Newton:[7]

> In campagna, dalle parti di Grantham, ci fu un giorno un gran temporale, più o meno al tempo della morte di Oliver Cromwell. C'era lì un ragazzo che si divertiva in questo modo curioso. Volgeva le spalle al vento e faceva un salto: era, naturalmente, un salto abbastanza lungo, perché favorito dal vento. Poi si voltava controvento e faceva ancora un salto, che però non gli riusciva così lungo come il precedente. Misurò molto accuratamente la lunghezza dei due salti: era questo il suo modo di determinare la forza del vento. Il ragazzo era Isaac Newton, quello che un giorno avrebbe misurato la forza – se di forza si tratta – che sospinge i pianeti nelle loro orbite.

Anche la storia di come, in seguito, Newton sarebbe arrivato a scoprire che la gravitazione è la causa che presiede al moto dei pianeti potrebbe essere stata inventata di sana pianta, come d'altra parte anche l'aneddoto della mela che cade da un albero. Ma ecco quella che, più o meno, potrebbe essere una storia vera.[8]

Christopher Wren era l'architetto della Cattedrale di San Paolo a Londra, Edmund Halley era un astronomo di fama e Robert Hooke era un fisico. Avevano l'abitudine d'incontrarsi, abbastanza spesso, per discutere di argomenti che spaziavano dal gusto della birra al significato della vita: la fisica e la matematica, pensavano, dovevano trovarsi a metà strada fra l'uno e l'altro di questi argomenti. Si incontrarono un giorno del 1684 a Londra e presero a discorrere dell'idea di Cartesio che il moto dei pianeti fosse dovuto a venti regolari costanti dai quali i pianeti stessi sarebbero sospinti, di vortice in vortice, immersi in un fluido invisibile. Dopo una lunga discussione, si affacciò alla loro mente l'idea che forse non erano i venti cartesiani a mantenere i pianeti in orbita, ma una qualche forma di forza gravitazionale. Forse era proprio il Sole che manteneva i pianeti in orbita, operando il sortilegio di costringere i pianeti a deflettere dal moto rettilineo.

«E se» domandò Wren «il Sole esercitasse sulla Terra in movimento una qualche sconosciuta forza di attrazione? Potrebbe quell'attrazione imporre alla Terra un'orbita ellittica?»

«Ah!» disse Halley. «Così voi suggerite che se potessimo dimostrare matematicamente che una forza di attrazione in direzione del Sole è in grado di determinare un'orbita ellittica, allora si avrebbe la ragionevole certezza che è proprio il Sole che, di fatto, esercita tale attrazione.»

«Io sono in grado di rispondere al quesito» rispose Hooke.

«E io sono disposto a mettere in palio quaranta scellini, se riuscirete a trovare la risposta entro il prossimo mese», replicò Wren (quaranta scellini del 1684 equivalgono a circa 750 euro).

Ma Hooke non si fece vivo con la sua risposta.

Passarono parecchi mesi prima che Halley incontrasse Newton a Cambridge e gli chiedesse il suo parere sull'argomento.

«Sir Isaac» disse Halley «se il Sole attraesse un pianeta in movimento con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza che lo separa dal pianeta stesso, quale sarebbe la traiettoria del pianeta?» «Un'ellisse» rispose Newton senza la minima esitazione.

«Come fate a saperlo?», domandò stupito Halley.

«Lo so, ho fatto i miei calcoli.»

«Posso vederli?»

«Ve li spedirò appena li avrò trovati.»

Una teoria – in realtà una congettura – sull'azione del Sole posto come causa delle orbite ellittiche dei pianeti sembra un primo passo promettente. Ma quando si arrivò a postulare la nozione di una gravitazione universale?

Ed è qui che interviene, naturalmente, la leggenda della mela che cade dall'albero. Nella sua versione originale, risale a William Stukeley, che così ricorda ciò che udì dal suo buon amico sir Isaac Newton, al termine di una giornata spesa con lui, nella residenza che Newton aveva fissato a Kensington (che allora non era ancora un quartiere di Londra, ma un villaggio):[9]

> Dopo pranzo, essendo il clima mite, ci ritirammo nel giardino, noi due soli, dove prendemmo il tè, all'ombra di alcuni meli. In mezzo ad altri discorsi mi disse che si trovava proprio nella stessa circostanza di quel giorno in cui per la prima volta gli si era affacciata la nozione di gravitazione. «Perché quella mela cade necessariamente a terra sempre lungo la verticale?»: questo è quel che pensò allora tra sé e sé. Formulò questo pensiero osservando una mela che cadeva dall'albero, mentre se ne stava seduto in contemplazione. «Perché non dovrebbe cadere di lato? O, ancora: perché non si sposta dal basso in alto? Perché sempre verso il centro della Terra? Certo, la ragione è che la Terra l'attira in basso. La materia deve avere un potere di attrazione e la somma del potere di attrazione di tutta la Terra deve trovarsi tutta al centro, e non dispersa nelle sue parti. È questa la ragione per cui la mela cade perpendicolarmente, cioè verso il centro della Terra? E se la materia attira la materia, questa attrazione deve essere proporzionale alla quantità di materia. Dunque, la mela attrae la Terra non meno di quanto la Terra attragga la mela.»

L'idea della gravitazione terrestre non era nuova ma ecco che «la mela attrae la Terra», come disse Newton: un concetto radicale destinato a portare le cose molto lontano. Secondo questa concezione, ciò che spinge la mela in basso è anche ciò che mantiene la Luna nella sua orbita, come se la Luna fosse un qualunque proiettile. Ciò che mantiene un oggetto distante come la Luna vincolato alla Terra è precisamente ciò che attrae la mela posta a poca distanza dalla superficie terrestre, o anche un pianeta molto distante. Improvvisamente l'intero Universo è riempito di corpi, grandi e piccoli, che si attraggono l'un l'altro in tutte le direzioni, tutti attraggono tutto, una mela attrae i pianeti, i pianeti attraggono le mele. A partire da questa teoria, Newton fu in grado di correlare la forza di attrazione tra due oggetti alle loro masse e alla distanza che intercorre tra loro.

Quando Halley fece visita a Newton a Cambridge e gli chiese che tipo di traiettoria avrebbe dovuto seguire un pianeta se fosse collegato da un filo al Sole e il filo attraesse il pianeta con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, Newton rispose immediatamente che la traiettoria avrebbe dovuto essere un'ellisse. Lo sapeva perché aveva già considerato questa ipotesi – la legge dell'inverso del quadrato – diciotto anni prima, al tempo dell'ozio studioso trascorso nella casa di campagna, via dalla peste che infuriava a Londra.

Newton era incappato in qualcosa di meraviglioso. Superando lo scetticismo iniziale, dal momento che il suo punto di partenza, tutto sommato, era costituito soltanto da alcune osservazioni grossolane, formulò la legge della gravitazione universale come stratagemma matematico semplicissimo, ma che consentì in seguito di fornire una descrizione del moto sorprendentemente accurata. Newton elaborò i suoi calcoli, nei quali fece ricorso all'analisi infinitesimale, nel periodo tra il 1665 e il 1677, ma non li pubblicò.

Nel 1676, avendo saputo che Leibniz lavorava su qualcosa di simile, gli inviò due lettere nelle quali presentava in maniera alquanto criptica le sue intuizioni di calcolo infinitesimale, evitando tuttavia di menzionare espressamente il metodo seguito e riconoscendo onestamente il suo debito nei confronti dei predecessori. John Wallis, il matematico inglese che contribuì egli stesso, e in maniera sostanziale, alla nascita del calcolo infinitesimale, scrisse: «Mr. Isaac Newton, illustre professore di matematica a Cambridge [...] intorno al 1664, o al 1665 [...] si applicò con grande sagacia alla speculazione [sulle serie infinite]. Questo è quanto ho trovato in due sue lettere (che ho letto) scritte su questo argomento a Mr. Oldenburg (datate il 13 giugno e il 24 ottobre 1676) piene di scoperte moto ingegnose e degne senz'ombra di dubbio di essere divulgate».[10]

Newton pubblicò le sue scoperte nell'opera monumentale Philosophiae naturalis principia mathematica, raccolte in un seguito di proposizioni sulla velocità e sull'accelerazione, la cui formulazione, in termini geometrici, apparirebbe alquanto imprecisa se giudicata alla luce degli standard attuali. Sono qui presentati i tre princìpi fondamentali della dinamica, in base ai quali è possibile comprendere la meccanica dei pianeti, l'idrodinamica, i moti oscillatori, le orbite delle comete e le maree. I Principia trasformarono la meccanica in una scienza esatta.

Due suoi stretti amici della Royal Society, John Conduitt e William Stukeley, riportano gli eventi che precedono la pubblicazione dei Principia.[11] Qui si fa menzione, fra l'altro, di una storia che ebbe un certo seguito, secondo la quale vi sarebbe stata una discrepanza tra la forza effettivamente necessaria a mantenere la Luna in orbita intorno alla Terra e quella postulata dalla legge dell'inverso del quadrato, applicata alla Terra e alla Luna. Ma Newton stesso, rievocando in età avanzata tale questione, affermò che non c'era alcuna seria discrepanza:[12]

> Ho dedotto [dalla terza legge di Keplero] che le forze che mantengono i pianeti nelle loro orbite devono essere inversamente proporzionali al quadrato delle distanze dal centro del moto di rivoluzione: quindi ho confrontato la forza necessaria a mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla superficie della Terra, e ho trovato che si rispondevano con buona approssimazione. Tutto questo avvenne negli anni della peste, nel 1665 e nel 1666, allorché mi trovavo nel pieno del mio vigore inventivo e mi applicavo alla matematica e alla filosofia naturale più di quanto non avrei fatto nel tempo successivo della mia vita.

Newton trovò che «si rispondevano con buona approssimazione»: non ha l'aria di essere propriamente una discrepanza. Si intravede, semmai, un problema a monte, ancora da approfondire, che Newton accantonò temporaneamente, perché doveva affrontare un'altra difficoltà. Doveva dimostrare che l'attrazione gravitazionale tra due corpi è la stessa che si avrebbe se tutta la loro massa fosse concentrata nei rispettivi baricentri. Sarebbe stato estremamente difficile per il giovane Newton provare questo assunto, considerato che il calcolo infinitesimale non era ancora stato inventato.

Il problema era che per masse delle dimensioni della Terra o della Luna la definizione di distanza si presenta ambigua. Applicando la legge dell'inverso del quadrato, bisognerà tenere in considerazione la distanza tra le superfici affacciate o tra i centri delle masse? La risposta più intuitiva è che si debbano prendere in considerazione i centri delle masse (cioè i baricentri), ma la scelta di considerare i baricentri per il calcolo delle distanze richiede una giustificazione matematica. Torneremo in seguito su questo argomento.

La legge di gravitazione universale è intimamente connessa con il calcolo infinitesimale attraverso una sottigliezza. La legge afferma che, se F è la forza di attrazione gravitazionale e r la distanza tra i baricentri delle masse, allora il prodotto $r^2 \cdot F$ è costante per masse fissate.

La legge viene comunemente espressa affermando che la forza di attrazione fra due corpi qualsiasi è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. In formula, l'intensità della forza di attrazione tra due masse m_1 e m_2 sarà:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

La magia della formula sta tutta nella lettera G che indica una costante universale, un numero che non dipende dall'aver scelto questa o quella locazione dell'Universo. La costante universale è sempre la stessa, nell'attrazione tra una palla di cannone e la Terra, come pure in quella tra Giove e la Terra.

Per arrivare alla legge dell'inverso del quadrato Newton cominciò con il considerare che la Luna procederebbe nel suo moto a velocità costante e in linea retta se non fosse attratta continuamente dalla forza gravitazionale che ne curva la traiettoria intorno alla Terra. Si sapeva che le palle di cannone seguono, prima di cadere a terra, una traiettoria parabolica. Newton pensò a che cosa succederebbe se si sparasse una palla di cannone a grande distanza, per esempio da Londra in Francia, di là dal canale della Manica: anche in questo caso la traiettoria sarebbe un arco di parabola. Quindi provò a immaginare che cosa succederebbe se la palla di cannone fosse spinta da una forza tremenda che le facesse raggiungere l'India, o la Cina, o il Giappone. Che cosa succederebbe se il cannone fosse portato in cima a una montagna e la potenza di fuoco fosse così grande da proiettare la palla oltre il Giappone? Newton pensò che in questo caso la palla di cannone non raggiungerebbe la superficie terrestre ma continuerebbe nel suo moto a «cadere» verso Terra, entrando in un'orbita perenne intorno al nostro pianeta.

Dunque la legge dell'inverso del quadrato è soltanto una parte dell'idea che sta dietro il concetto di gravitazione universale. Bisogna mettere in conto anche il cosiddetto moto inerziale. Da sempre, fin dagli esperimenti di Galileo sul movimento, si sapeva che un oggetto in quiete ovvero in moto rettilineo uniforme persevera nel suo stato finché non intervenga una qualche forza esterna che lo costringa a mutare il suo stato di quiete o il suo regime di moto. Questo fu dunque il punto di partenza dei Principia di Newton: il principio d'inerzia, detto anche primo principio della dinamica. A partire da questa legge, Newton fu in grado di spiegare le orbite ellittiche dei pianeti introducendo l'ipotesi che essi fossero «distratti» dal moto rettilineo uniforme per azione delle forze esercitate da masse poste a distanza, in una sorta di tiro alla fune. Si tratta ora di dimostrare che, se le orbite sono ellittiche, allora la forza di attrazione è inversamente proporzionale al quadrato delle distanze.

Newton sapeva dalla prima legge di Keplero che i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche, ma sapeva anche che tali orbite non si discostano molto da un'orbita circolare. Pensò anche che ipotizzando un'orbita circolare avrebbe potuto semplificare i calcoli, cogliendo comunque l'essenza del problema più generale, relativo a orbite ellittiche.

Possiamo riassumere il ragionamento in sei passi.

1) Newton cominciò con il considerare l'accelerazione di un pianeta che si muova di moto circolare uniforme, con velocità v_P, lungo una circonferenza di raggio r. In questo caso l'accelerazione a_P del pianeta, cioè la rapidità di variazione della velocità, è la cosiddetta accelerazione centripeta:

$$a_P = \frac{v_P^2}{r}$$

2) Consideriamo adesso il periodo T di rivoluzione di un pianeta: per esempio, il periodo di Marte intorno al Sole, cioè il tempo impiegato da Marte per compiere un anno marziano. Poiché, per definizione, nel tempo di un periodo il pianeta descrive una circonferenza, si ha: $T \cdot v_P = 2\pi r$. Pertanto:

$$v_P = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{ossia} \quad v_P^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{r^2}{T^2}$$

3) Dalle equazioni in evidenza ai punti 1) e 2) si arriva a determinare l'accelerazione in funzione del periodo T e della distanza r:

$$a_P = 4\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2}$$

4) A questo punto teniamo conto della terza legge di Keplero, secondo la quale i quadrati del periodo di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali al cubo delle loro distanze dal Sole. Indicando con la lettera C una costante si ha:

$$T^2 = C \cdot r^3$$

5) Confrontando le equazioni in evidenza ai punti 3) e 4), arriviamo a stabilire che:

$$a_P = \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{1}{r^2}$$

6) Nei suoi Principia Newton aveva enunciato il secondo principio della dinamica, stabilendo che tra l'accelerazione a di un corpo di massa m e la forza F che imprime tale accelerazione sussiste la relazione: F = ma. Nel nostro caso, F coincide con F_S, la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole, m è la massa dal pianeta m_P, e a è l'accelerazione a_P del pianeta che orbita intorno al Sole. Si ha quindi:[13]

$$F_S = \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{m_P}{r^2}$$

Dunque r è la distanza fra i baricentri dei corpi, e ciò è facile vederlo se questi ultimi sono il Sole e la Luna. Ma se si trattasse, per esempio, del Monte Fuji? Il sistema di forze di attrazione gravitazionale reciproca dovuto alle diverse masse – estremamente disomogenee – che contribuiscono alla massa totale della Terra è molto complesso. Le forze interne si intrecciano con i contributi delle parti emerse della Terra, per esempio con quello dell'ammasso roccioso del Monte Fuji e con quello dell'isola di Madagascar, nonché con il contributo gravitazionale dei mari, che comprendono le grandi masse d'acqua nelle profonde fosse oceaniche. Quale sarà mai la risultante di tutte queste forze? Newton inventò brillantemente il calcolo infinitesimale e lo utilizzò per determinare il centro di gravità (o centro di massa, o baricentro) di un sistema di masse qualsiasi, il che gli consentì di risolvere il problema della dispersione delle masse e semplificare così l'applicazione della legge di gravitazione universale. Grazie alla potente tecnica di passaggio al limite, propria del calcolo infinitesimale, è possibile considerare qualunque insieme di masse (come quelle costituenti la Terra), ciascuna delle quali è soggetta alla legge dell'inverso del quadrato, come un'unica massa concentrata nel baricentro. Per quanto irregolare sia la forma della massa e per quanto grandi siano le sue dimensioni, il suo contributo alla forza gravitazionale si manifesta come se la massa stessa fosse concentrata in un singolo punto matematico, il baricentro. C'è della bellezza in questa semplicità.

Il telescopio era già stato inventato e perfezionato, le distese marine del vasto mondo erano state esplorate molto tempo prima che Newton fosse nato: eppure continuavano a essere impiccate o bruciate le streghe; i traditori e i criminali erano normalmente decapitati nelle pubbliche piazze, quindi le loro teste erano scottate con acqua bollente perché si conservassero a contatto con gli agenti atmosferici, appese ai pali delle strade più trafficate; l'alchimia continuava a essere praticata, nonostante i progressi della scienza chimica.

Quando Newton morì, nel 1727, gli occhiali e i giornali erano ormai alla portata di tutti. L'Europa era stata attraversata da sconvolgimenti politici; i piccoli ducati dell'Europa centrale a seguito di guerre e fusioni diventavano regni, mentre ampi territori della Polonia e dell'Impero ottomano venivano erosi dagli stati confinanti. La popolazione delle città rimaneva contenuta (Londra contava meno di 600000 abitanti, Parigi meno di 700000), i lupi ancora si spingevano alle porte delle città. Nelle grandi città d'Europa, come pure nelle città sedi di università, cominciavano a nascere i caffè: erano illuminati sontuosamente, provvisti di comodi tavolini e arredati con gusto: qui si leggevano giornali come il Daily Courant e la London Gazette. Le strade erano illuminate, era possibile attardarsi fino a notte inoltrata per discutere di politica, di filosofia e delle scoperte scientifiche più recenti.[14] Si affermava in Europa uno stile di vita vivace. I caffè non erano soltanto ritrovi buoni per scambiare pettegolezzi e notizie, ma luoghi dove studenti e professori scambiavano le loro idee riguardo ai libri che andavano leggendo, discutevano di poesia e di teatro, sbrigavano la corrispondenza o udivano le ultime novità scientifiche. Si fondarono accademie e società scientifiche provviste di fondi destinati alle pubblicazioni scientifiche e allo sviluppo di strumenti di ricerca e costose strumentazioni di misura.

Nei cinquant'anni che seguirono la morte di Newton, Denis Diderot avrebbe portato a termine il progetto in diciassette volumi della prima parte dell'Encyclopédie;[15] Edward Gibbon avrebbe stupito il mondo con il suo libro Decadenza e caduta dell'impero romano; Jean-Jacques Rousseau avrebbe scritto Il contratto sociale; James Watt avrebbe costruito la macchina a vapore; Mozart avrebbe scritto le sue serenate e sinfonie; sarebbe morto Bach, sarebbe nato Beethoven.

Nonostante l'incremento della tratta degli schiavi, nonostante le guerre che continuavano a imperversare in tutta Europa e che proseguivano nei territori d'oltremare: nonostante tutto ciò, il commercio e il dominio dei mari, la scienza, l'arte, la letteratura e le invenzioni miglioravano la vita degli uomini. Di qui a poco ci sarebbe stata l'esplosione dell'Età dei Lumi. Si andava formando una classe media che non soltanto cominciava a riflettere sulle questioni di politica ma che si appassionava alla scienza e alla letteratura.

Le strade dell'informazione globale erano ormai tracciate: adesso venivano allargate per il trasporto di sempre più numerose notizie che riguardavano le calamità naturali, le mode intellettuali e le scoperte scientifiche. I movimenti culturali si rafforzavano e si affinavano sempre più: di qui sarebbero nate nuove scoperte. I movimenti dei pianeti, d'altra parte, per non parlare di quelli delle palle di cannone e delle frecce, erano adesso studiati, fondamentalmente, mediante gli strumenti del calcolo infinitesimale. I paradossi di Zenone, a questo punto, dovevano sembrare più irrilevanti che mai.

QUARTA PARTE

Un turbine di assurdità: nuove prospettive

11. La velocità della luce

L’indagine sulla luce sarà decisiva per l’imminente grande progresso sulla strada della comprensione del movimento. Dobbiamo questo progresso – anche questo – al genio di Newton, la cui immaginazione creativa toccò l’acme nei diciotto mesi che trascorse in isolamento a Woolsthorpe, per sfuggire la grande peste che imperversava a Londra. Lavorando nella penombra di una stanza tranquilla che gli serviva da studiolo e da laboratorio, il ventiquattrenne Newton, fresco di laurea a Cambridge, faceva alcuni esperimenti con i raggi di luce solare che attraversavano un forellino praticato nello scuro della finestra, che si era premurato di chiudere completamente. Era un pomeriggio di gennaio e il sole era relativamente basso nel cielo. Un raggio di luce bianca attraversava un prisma di vetro triangolare che Newton aveva posizionato in modo da intercettarne il percorso.

Scrisse in seguito William Wordsworth, ammiratore di Newton, la cui stanza al St. John’s College, Cambridge, si affacciava alla cappella del Trinity College (in questo collegio Newton fu prima allievo e poi docente):[1]

> Davanti alla cappella sorgeva la statua
> di Newton, con espressione silenziosa e il prisma in mano,
> segno marmoreo di una mente in traversata
> perenne solitaria del mare di pensiero inesplorato.

Il giovane Newton osservava il «bianco» naturale della luce solare – quel bianco che da sempre si era pensato che significasse assenza di colore –, venire scomposto nei colori dell’arcobaleno. È probabile che già prima di allora Newton avesse osservato la scomposizione della luce che attraversa un prisma. Ma l’esecuzione dell’esperimento in condizioni controllate, l’ambiente isolato di laboratorio e l’esame attento e profondo del fenomeno lo portarono quel giorno particolare a formulare idee inedite, mai pensate prima di allora, sulla natura della luce. Se ne stava all’indietro, con i capelli scomposti, i vestiti in disordine: osservava i colori e si domandava che cosa avverrebbe se lungo il percorso della luce emergente dal primo prisma, suddivisa nei vari colori, si ponesse un secondo prisma. Bene: l’interposizione di un secondo prisma aveva l’effetto di ricombinare tutti i colori nel colore bianco d’origine.

Altri, prima di Newton, devono avere notato le iridescenze luminose che si manifestano quando un raggio di sole attraversa un vetro sfaccettato, ma Newton sembra che sia stato il primo ad avere esaminato dettagliatamente il problema del perché la luce bianca che entra in un prisma dovrebbe emergerne suddivisa in colori sempre ordinati come il rosso, l'arancio, il giallo, il verde, il blu e il viola. I primi esperimenti significativi sulla luce furono eseguiti da Newton in quel pomeriggio di gennaio del 1666; di qui ebbero inizio la spettroscopia, l'analisi scientifica della composizione dei colori, gli studi di ottica che sarebbero stati raccolti in seguito in un ampio trattato, pubblicato nel 1704: Ottica, trattato sulle riflessioni, inflessioni e colori della luce. Cominciò di qui la scienza della luce: la quale, in ultima analisi, è ciò che ci permette di osservare il moto.

Ma che cosa si sapeva della luce prima di Newton? Si sapeva che si propaga in linea retta (ed è questa la ragione per cui proietta ombre dai contorni ben definiti), si sapeva anche che è soggetta a rifrazione quando attraversa l'acqua o il vetro e che viene riflessa da una superficie levigata. Gli esperimenti condotti da Newton erano alla portata di tutti, anche di Zenone. Al tempo di Euclide si sapeva bene che nel fenomeno di riflessione in uno specchio l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza. Claudio Tolomeo impiegò tempo ed energie notevoli nella misura degli angoli di incidenza e di rifrazione della luce che attraversi due diversi mezzi trasparenti, scontrandosi con la difficoltà di descrivere il fenomeno mediante una legge semplice. Per trovare questa legge bisogne rà aspettare il 1621, quando il matematico e scienziato olandese Willebrord Snell scoprì che il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza alla superficie di separazione dei due mezzi (indichiamo tale angolo con α_1) e quello dell'angolo di rifrazione (α_2) dipende dalle densità dei mezzi attraversati dalla luce secondo la relazione:

$$\frac{sen\,\alpha_1}{sen\,\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione assoluti dei due mezzi. I seni e, in generale, la trigonometria furono inventati nel V secolo dagli astronomi indiani: perciò Tolomeo non ne sapeva niente.

L'arcobaleno è stato oggetto di studio da parte dei filosofi, fin dai tempi più antichi. Aristotele credeva – ma si sbagliava – che fosse dovuto a un fenomeno di riflessione della luce da parte di goccioline di pioggia sospese nell'aria.[2] Come la maggior parte dei filosofi del suo tempo, riteneva anch'egli che la velocità della luce fosse infinita. Era un pensiero che doveva comportare tutta una serie di paradossi del genere di quelli di Zenone, riguardo allo spazio e al tempo. Certo, la luce doveva apparire incredibilmente veloce a chi non disponeva di strumenti per determinarla: ma era proprio infinita?

Due matematici e fisici arabi dell'XI secolo, Abū Alī al-usayn ibn Abd Allāh ibn Sīnā (il cui nome fu latinizzato in Avicenna) e Abū Alī al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham (conosciuto in Occidente come Alhazen), si rifiutavano di credere che la velocità della luce fosse infinita;[3] anche in Occidente, nel XVII secolo, c'era chi – come Cartesio – riteneva che la luce viaggiasse a velocità finita. Galileo prese posizione sull'argomento scrivendo di un esperimento inteso a dimostrare che la luce si sposta a velocità notevolissima, ma finita. In una pagina dei suoi Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Sagredo, Simplicio e Salviati[4] si trovano, al solito, immersi in una discussione di «filosofia naturale». Sagredo domanda se la propagazione della luce sia istantanea o se invece non «richieda, come tutti gli altri movimenti, un tempo opportuno per compiersi.

Non possiamo deciderlo con un esperimento?». La risposta di Simplicio è che «l'esperienza di tutti i giorni dimostra che la propagazione della luce è istantanea». Sostiene che «quando vediamo un proiettile lanciato da una bocca da fuoco, e lo osserviamo a grande distanza, avviene che la luce provocata dall'esplosione della polvere pirica raggiunga i nostri occhi immediatamente; invece il fragore dell'esplosione raggiunge le nostre orecchie soltanto dopo che sia trascorso un conveniente intervallo di tempo». Ma Sagredo ribatte: «L'unica cosa che sono in grado di dedurre da questo briciolo di esperienza che abbiamo fatto tutti è che il suono, nel raggiungere le nostre orecchie, si sposta molto più lentamente della luce; cioè, questa esperienza non mi dice se lo spostamento della luce è istantaneo o se, invece, per quanto estremamente rapido, si compie in un intervallo di tempo». A questo punto Salviati espone un esperimento che ha pensato per determinare se la velocità della luce sia infinita, o meno:

> Voglio che due piglino un lume per uno, il quale, tenendolo dentro lanterna o altro ricetto, possino andar coprendo e scoprendo, con l'interposizion della mano, alla vista del compagno, e che, ponendosi l'uno incontro all'altro in distanza di poche braccia, vadano addestrandosi nello scoprire ed occultare il lor lume alla vista del compagno, sì che quando l'uno vede il lume dell'altro, immediatamente scuopra il suo; la qual corrispondenza, dopo alcune risposte fattesi scambievolmente, verrà loro talmente aggiustata, che, senza sensibile svario, alla scoperta dell'uno risponderà immediatamente la scoperta dell'altro, sì che quando l'uno scuopre il suo lume, vedrà nell'istesso tempo comparire alla sua vista il lume dell'altro. Aggiustata cotal pratica in questa piccolissima distanza, ponganso i due medesimi compagni con due simili lumi in lontananza di due o tre miglia, e tornando di notte a far l'istessa esperienza, vadano osservando attentamente se le risposte delle loro scoperte ed occultazioni seguono secondo l'istesso tenore che facevano da vicino; che seguendo, si potrà assai sicuramente concludere, l'espansion del lume essere instantanea: ché quando ella ricercasse tempo, in una lontananza di tre miglia, che importano sei per l'andata d'un lume e venuta dell'altro, la dimora dovrebbe esser assai osservabile.

Alla luce delle conoscenze odierne questo esperimento sembra sciocco. Infatti, sappiamo oggi che se la distanza tra i due sperimentatori è di tre miglia, il tempo che la luce impiegherebbe per compiere il percorso di andata e ritorno sarebbe di poco superiore a 30 microsecondi, cioè 30 milionesimi di secondo. Dunque sarebbe un intervallo impercettibile.

Non fu però un esperimento ciò che consentì di determinare la risposta: piuttosto fu un'osservazione casuale dell'eclissi di una delle lune di Giove. Nel 1676 l'astronomo danese Ole Rømer decise di far luce su un mistero, finora rimasto senza spiegazione, riguardo ai satelliti di Giove. Notò che il tempo intercorrente tra due eclissi successive dei satelliti (in particolare Rømer studiò l'orbita del satellite Io), che avrebbe dovuto essere sempre lo stesso, dal momento che i satelliti orbitano intorno a Giove con velocità costante, si accorciava quando la Terra si avvicinava a Giove, mentre si allungava quando la Terra se ne allontanava. Conseguentemente l'istante di inizio dell'eclissi tendeva ad anticipare, o a ritardare, rispetto a quello previsto dai calcoli, nell'ipotesi di propagazione istantanea della luce. In pratica, quando la Terra si trovava nel punto più lontano da Giove, l'eclissi di Io cominciava con un ritardo di 22 minuti rispetto a quando si trovava più vicina a Giove. Rømer pervenne alla conclusione che tale differenza (Δt = 22 min) dovesse essere attribuita alla diversa distanza che la luce deve coprire per raggiungere la Terra (la differenza tra le due distanze, massima e minima, che separano Giove dalla Terra vale: $\Delta s \simeq$ 300000000 km). Mettendo insieme questi due dati Rømer fu in grado di calcolare – molto semplicemente – che la velocità della luce doveva essere di circa 225000 km/s. Infatti, indicando con c la velocità della luce si ha:

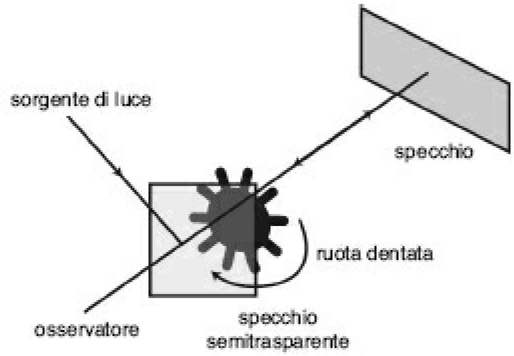
$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \simeq \frac{300 \cdot 10^6}{22} \frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{300 \cdot 10^6}{22 \cdot 60} \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 227273 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Questo valore differisce, rispetto a quello determinato oggi con procedure accurate, di circa 75 000 km/s: ma quel che importa è che finalmente si ebbe un argomento convincente a favore della finitezza della velocità della luce.[5]

Ma perché la luce dovrebbe disperdersi passando attraverso un prisma? E perché la luce blu subisce una rifrazione maggiore della luce rossa? Se la luce fosse costituita da minuscole particelle, come suggerito da Newton, com'è allora che i fasci di luce si attraversano l'un l'altro senza che si manifesti collisione tra le particelle dalle quali sono pur sempre composti? Inoltre: com'è che i corpuscoli costitutivi della luce possono muoversi da un punto all'altro, e istantaneamente?

La dimostrazione di Rømer avrebbe dovuto convincere tutti del fatto che la velocità della luce è finita, e non infinita; soprattutto ogni ostacolo avrebbe dovuto essere rimosso dal momento in cui Rømer fu in grado di prevedere, in base all'argomento della finitezza della velocità della luce, i ritardi di altre eclissi: ritardi, cioè, tra tempi attesi e tempi osservati. Newton e Christiaan Huygens, matematico, fisico e astronomo olandese del XVII secolo (fu lui a depositare il primo brevetto per la costruzione di un orologio a pendolo)[6] si convinsero della correttezza dell'argomento di Rømer; non così però molti altri fisici. La comunità scientifica si aspettava un esperimento di laboratorio e non una misura che dipendesse da osservazioni astronomiche. Dopo tutto, il fisico francese Marin Mersenne era stato in grado di determinare la velocità del suono in laboratorio, appunto.

Facciamo ora un balzo in avanti, dai tempi di Newton a un'epoca più recente, circa due secoli dopo: siamo nel 1849 e ci troviamo nel laboratorio di Armand Hippolyte Louis Fizeau, il quale, lavorando con una strumentazione di notevole semplicità, sarebbe stato in grado non soltanto di dimostrare che la velocità della luce è finita, ma anche di determinarne il valore con precisione: stabilì che la velocità della luce nell'aria è 312480 km/s, un valore sorprendentemente vicino a quello oggi misurato con la maggiore accuratezza possibile (299784 ± 10 km/s: nel vuoto, come vedremo in seguito, la velocità della luce è leggermente superiore). L'esperimento escogitato brillantemente da Fizeau aveva il pregio di essere, oltre tutto, semplice. La strumentazione comprendeva un insieme di lenti e uno specchio, ma la parte principale era costituita da una ruota dentata, con 720 denti. La ruota era installata in una collina a Suresnes, un villaggio vicino a Parigi; l'esperimento procedeva così (si veda la figura nella pagina a fianco): si fa passare un raggio di luce nella cava superiore della ruota dentata, inizialmente ferma (la cava è lo spazio tra un dente e l'altro). La luce prosegue il suo cammino finché viene riflessa da uno specchio a 8,68 km di distanza, collocato in vista di Suresnes, sulla collina di Montmartre, a Parigi. Quindi si pone in rotazione la ruota dentata, di modo che i denti intercettino ripetutamente il raggio di luce, ottenendo un effetto di luce stroboscopica.



Mettendo in rotazione la ruota dentata, avviene che il raggio di luce sia intercettato, in un senso o nell'altro, cioè nel percorso di andata o in quello di ritorno: il risultato è che agli occhi dell'osservatore di Suresnes la luce riflessa sarà meno intensa di come appariva quando la ruota era ferma. Ci sarà però una velocità di rotazione tale che la luce passa per una certa cava nel percorso di andata e per un'altra cava, la successiva, nel percorso di ritorno. Perciò Fizeau incrementò gradualmente la velocità di rotazione finché a Suresnes si osservò la massima intensità di luce riflessa. In queste condizioni la luce compiva il percorso di andata e ritorno, da Suresnes a Montmartre, e da Montmartre a Suresnes, esattamente nel tempo necessario perché la ruota avanzasse di una cava. In questo modo era possibile misurare la velocità della luce. Infatti:

– Fizeau determinò sperimentalmente che il raggio riflesso presentava la massima intensità quando la ruota girava alla velocità di 25 giri al secondo;
– perciò, considerando che 720 sono i denti della ruota dentata, il tempo necessario perché una cava si porti nella posizione della cava contigua risultava: 1/25 · 1/720 = 1/18 000 s;
– tenuto conto del fatto che il percorso di andata e ritorno Suresnes-Montmartre-Suresnes è 8,68 · 2 = 17, 36 km, la velocità della luce è:

$$\frac{17{,}36}{1/18\,000} = 17{,}36 \cdot 18\,000 = 312\,480 \text{ km/s}$$

L'esperimento di Fizeau convinse gli scienziati che la velocità della luce è finita. Avanzavano però molte perplessità sull'accuratezza della misura. Pur essendo quello di Fizeau un esperimento di laboratorio, la determinazione della velocità della luce dipendeva dal giudizio dello sperimentatore riguardo alla massima intensità di luce riflessa percepita. Inoltre destava perplessità il fatto che un apparato di laboratorio così semplice potesse misurare con precisione velocità dell'ordine di centinaia di migliaia di chilometri al secondo. Si sentiva l'esigenza di una strumentazione che misurasse la velocità della luce prescindendo dalla soggettività dell'apprezzamento di maggiore o minore intensità luminosa.

Questa strumentazione fu costruita da Jean Foucault. L'esperimento comincia facendo incidere un raggio luminoso su uno specchio rotante, che lo riflette in direzione di un secondo specchio, fisso, posto alla distanza di 20 metri. Il raggio a questo punto è nuovamente riflesso (dallo specchio fisso) in direzione dello specchio rotante, il quale però, nel momento in cui arriva il raggio, si sarà spostato di un angolo α. Il raggio di ritorno è riflesso dallo specchio rotante, in direzione della sorgente di luce, ma inclinato rispetto al raggio incidente di un angolo 2α (l'angolo è 2α per il principio della cosiddetta leva ottica). Conoscendo la velocità di rotazione dello specchio, e avendo misurato l'angolo 2α, Foucault fu in grado di stabilire che la velocità della luce doveva essere di 298000 km/s.

Albert Michelson perfezionò questo esperimento nel 1879, trovando che il valore della velocità della luce nel vuoto è 299853 km/s. Mostrò inoltre che la luce si propaga nel vuoto sempre con la medesima velocità, indipendentemente dalla sua frequenza, cioè indipendentemente dal colore.

A questo punto, disponendo di una misura della velocità della luce così accurata, si era parimenti in grado di determinare le distanze, con uguale precisione. Per esempio, si poteva inviare un raggio luminoso in una certa direzione fino a fargli colpire un bersaglio e misurare il tempo occorrente perché il raggio riflesso dal bersaglio giungesse all'osservatore; se la velocità della luce è costante ed è conosciuta esattamente, allora la distanza percorsa dal raggio di luce è data semplicemente dal valore della velocità di quest'ultima moltiplicato per il tempo impiegato a coprire tale distanza.

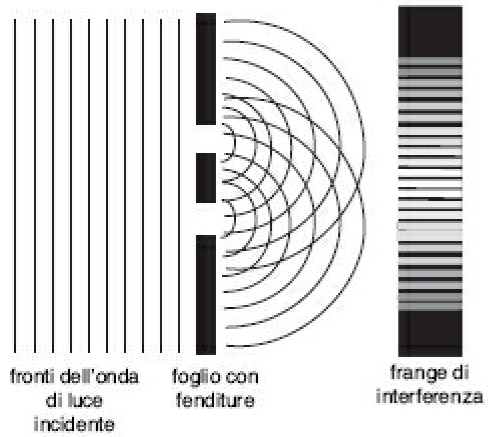
Ma com'è che la luce si propaga così velocemente? A differenza del suono, sembra che la luce non abbia difficoltà ad attraversare grandi distanze, per esempio dalle galassie a noi, coprendo miliardi di anni-luce di distanza. Come Cartesio prima di lui, Newton era del parere che la luce si propagasse, a partire dalla sorgente di emissione, in forma di «pacchetti» discreti, troppo deboli però perché potessero essere misurati. Certo, Newton prese in considerazione l'idea che la luce potesse propagarsi in forma ondulatoria, ma è anche vero che la sua concezione corpuscolare gli consentiva di dare una spiegazione attendibile della propagazione rettilinea della luce, del meccanismo di riflessione, nonché di quello di rifrazione nel passaggio della luce da un mezzo trasparente a un altro. La concezione corpuscolare della luce prevede che la sua propagazione sia qualcosa di analogo al movimento delle biglie di un biliardo: i «pacchetti» di luce rimbalzano quando incidono sulla superficie di un materiale troppo compatto perché possa essere penetrato, ma attraversano materiali meno densi; inoltre deflettono dal loro percorso iniziale entro un certo materiale quando ne incontrano un altro di caratteristiche diverse. Ciò premesso, Newton non era in grado di spiegare come due fasci di luce potessero incrociarsi e proseguire nella loro propagazione, cosa che invece si spiegava benissimo facendo ricorso all'ipotesi ondulatoria.

Per spiegare il fenomeno per cui due fasci di luce si incrociano senza intercettarsi, Huygens elaborò già nel 1656 l'idea delle onde di etere, anche se poi non riuscì a spiegare come la luce potesse propagarsi in forma d'onda attraverso il niente, né riuscì a trovare una spiegazione del fatto – indubitabile – che la luce si propaga in linea retta. «Etere» era un vocabolo greco utilizzato per spiegare il movimento dei corpi celesti. Vi aveva fatto ricorso Aristotele, affermando che l'etere è il quinto elemento (di qui, in latino, l'espressione di quinta essentia, cioè «quintessenza»), posto tutt'intorno alla sfera dell'aria. Al tempo di Newton il concetto di etere tornò in auge per spiegare i fenomeni di interferenza della luce, allorché si ipotizzò la sua natura ondulatoria e occorreva identificare un mezzo nel quale le onde si propagassero. L'etere – si disse – permea tutte le sostanze ed è presente in tutto lo spazio, compreso quello che si trova tra gli atomi costituenti i solidi. La sostanza dell'etere costituì materia di dibattiti e controversie. Intanto si osservò che la luce proietta ombre i cui contorni sono netti, ben definiti, proprio perché non sembra essere in grado di aggirare gli oggetti. Invece il suono, del quale si conosceva bene la natura ondulatoria, si propaga facilmente intorno agli oggetti, tant'è che non proietta dietro gli oggetti frapposti «ombre» di silenzio precisamente demarcato. Le onde sonore richiedono un mezzo materiale da attraversare: infatti nel vuoto non si ha propagazione del suono. Ma con la luce è diverso. Sembra che per la luce non vi siano difficoltà, perché la luce si propaga nel vuoto. Di fatto, la luce si propaga più velocemente e più facilmente nel vuoto che in qualunque altro mezzo materiale.

Tuttavia l'etere pone un altro problema. Le vibrazioni delle onde luminose sono trasversali rispetto alla direzione di propagazione: cioè, le sue oscillazioni si sviluppano perpendicolarmente alla direzione di propagazione, più o meno come le onde che provochiamo in una fune agitandola ritmicamente in su e in giù, o come le onde del mare che semplicemente vediamo innalzarsi e abbassarsi. Le onde del mare non penetrano mai la massa d'acqua: semplicemente, imprimono alla superficie marina un profilo ondulatorio in movimento. (Le onde sonore sono invece longitudinali: cioè, le oscillazioni dell'onda si manifestano parallelamente alla direzione di propagazione e si propagano all'interno di un qualunque mezzo materiale.) Se dunque la luce si propaga come un'onda, deve propagarsi in un materiale così rigido e puro da poter essere attraversato senza attrito. Le sostanze aeriformi e i liquidi non sono abbastanza rigidi per trasmettere onde trasversali. Da che cosa, dunque, dovrebbe essere costituito l'etere? Non deve forse la luce spostarsi attraverso qualcosa? La risposta che seguì non era quella che tutti si aspettavano. Era il secondo passo da compiere per arrivare a comprendere che cosa sia il movimento.

Era questa l'età del Romanticismo. Le guerre erano in pieno svolgimento. Goya dipingeva le sue due Maja. Lord Byron scriveva i primi poemi. Haydn completava il suo famoso oratorio, Le stagioni; Beethoven lavorava alla sinfonia Eroica. In tutto il mondo si compivano imprese grandiose e di grande risonanza. Nel 1801 il fisico inglese Thomas Young, i cui interessi e la cui produzione scientifica spaziavano dall'archeologia e filologia alla matematica e alla medicina, fece un esperimento per determinare se la luce si propagasse come uno sciame di particelle o come un'onda.

Young fece cadere un fascio di luce su un foglio sul quale erano praticati due forellini abbastanza vicini: la luce emergente dai forellini si divideva in due nuovi fasci che poi si ricombinavano sulla superficie di uno schermo, originando una serie di sottili bande multicolore, separate da intervalli scuri. Young arrivò alla conclusione che questo risultato poteva ottenersi soltanto se la luce effettivamente si comporta come un'onda: l'alternanza di bande chiare e oscure è dovuta al fatto che le creste e gli avvallamenti dell'onda si rinforzano (nelle bande chiare) o si elidono le une con gli altri (nelle bande scure).[7] Eppure Newton aveva affermato la natura corpuscolare della luce: la sua fama, il prestigio erano tali da far ritenere le sue parole assolutamente degne di fede. Perciò i risultati dell'esperienza di Young non furono accettati finché uno scienziato francese, Auguste Fresnel, fu in grado di confermare che la luce è veramente caratterizzata da una natura ondulatoria. Ma un'onda che si propaga necessita di un mezzo di propagazione: perciò, da quel punto in poi, si affermò che deve esserci un qualche mezzo materiale, invisibile, che riempie tutto l'Universo.



Alcuni parlarono in proposito di «etere luminifero», suggerendo che l'etere sia in grado di permeare tutta la materia, quella visibile e quella invisibile: il vuoto, le sostanze aeriformi, il vetro e qualunque altra sostanza che la luce possa penetrare. Da una parte, il concetto di etere sembrava assurdo: dopotutto, l'esistenza di una tale sostanza rigida andava contro ogni esperienza. D'altra parte il concetto di etere si rivelava utile per giustificare non soltanto la propagazione della luce, ma anche la nozione di azione a distanza che da sempre si era presentata problematica, fin dal momento in cui apparve che la forza di gravità era responsabile del moto dei pianeti. Per quanto la gravità fosse stata modellizzata sotto il profilo matematico per mezzo delle linee di forza, non aveva tuttavia trovato risposta la questione di come effettivamente agisca. Ci si pose allora la domanda: forse la gravitazione si propaga anch'essa per onde e, in caso affermativo, qual è il supporto di propagazione? Bisogna tener presente il fatto che in Inghilterra, all'inizio dell'epoca vittoriana, si celebrava il trionfo della civiltà delle macchine, e che i macchinari utilizzavano ingranaggi, pulegge e leve. Le persone colte non concepivano altre azioni a distanza se non quella di Dio o quella esercitata dai magneti. Potevano aver saputo del modo in cui la legge di gravitazione di Newton dà conto delle orbite dei pianeti, e i fisici più informati erano al corrente del concetto di campo di forza gravitazionale (e, conseguentemente, delle linee di forza tra masse) ma come fa, esattamente, il mondo fisico a essere conforme a quei campi matematici? I pianeti nel loro moto orbitale non sono legati al Sole da funi visibili. E, in ogni caso, qual è il principio di funzionamento dei magneti?

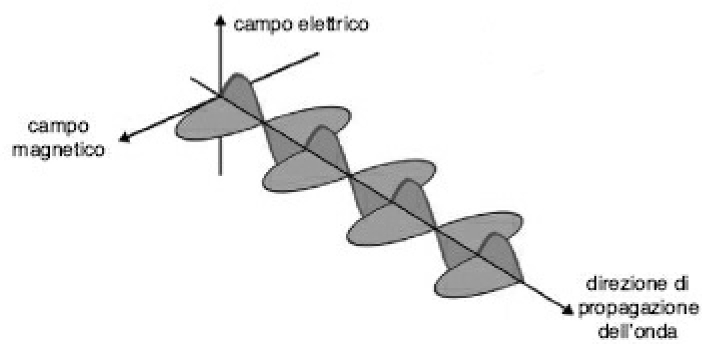
Nel 1820 il fisico danese Hans Ørsted collegò una pila (che era stata inventata nel 1800 da Alessandro Volta) a un filo di materiale conduttore piegato in modo da formare una spira: osservò che, avvicinata a una bussola magnetica, la spira determinava una deflessione dell'ago. Il «flusso» di elettricità – cioè, la corrente elettrica – autoinduceva una forza magnetica che si manifestava soltanto quando le estremità del filo conduttore venivano connesse al polo positivo e negativo della pila. Quindi, nel 1831, Michael Faraday, un tipico rappresentante della schiera di fisici sperimentali d'epoca vittoriana, riuscì a generare l'elettricità in un filo elettrico, facendo ruotare un magnete nelle sue vicinanze: questo è, precisamente, il principio di funzionamento della dinamo. Così Faraday stabilì un nesso significativo tra elettricità e magnetismo. Finora ci si era limitati a considerare l'elettricità come una sorta di fluido che scorre all'interno di un filo elettrico. Faraday andò oltre: ipotizzò che nello spazio tra il magnete e il filo elettrico dovesse prodursi qualche fenomeno grazie al quale la forza magnetica può attraversare lo spazio e causare il flusso di elettricità. Spiegò il fenomeno fisico nei termini di un campo di linee invisibili che circondano il magnete: le linee di forza descrivono l'intensità e la direzione della forza magnetica nello spazio.

I fisici tradizionalisti non presero seriamente in considerazione l'idea di campo formulata da Faraday, in parte perché sembrava folle credere che un campo di linee immateriali e di nessuna sostanza tangibile potesse avere un qualche effetto fisico, in parte perché disdegnavano il suo lavoro in quanto mancava di una conveniente cornice matematica. La teoria di Faraday era considerata una assurdità.

Il mondo cercava di arrivare a capire attraverso quale mezzo le cose si muovessero: in modo particolare, come si propagasse la luce, ma anche come si spostassero i pianeti. Potevano i campi fornire la forza necessaria al movimento senza che vi fossero oggetti fisici da spingere o attirare? Un campo è un luogo di punti. A ciascun punto corrisponde una descrizione di ciò che avverrà di un oggetto che sia posto in quel punto o che transiti per quel punto. Questa descrizione può essere, per esempio, la direzione da seguire a una certa velocità, una forza con la quale occorre interagire, o qualunque altra cosa che possa descrivere un comportamento o una variazione di comportamento. Per esempio, la limatura di ferro immersa in un campo magnetico riceve dal campo magnetico medesimo l'indicazione di orientarsi in una certa direzione, in base alla sua posizione nello spazio. Nel caso di un campo gravitazionale, ciascuna massa riceve dal campo l'indicazione dell'accelerazione alla quale è assoggettata, in base alla quale si porterà in una nuova posizione dove riceverà una nuova indicazione su dove ancora dovrà spostarsi ecc.

Nel 1864, lo stesso anno in cui fu assemblata a Ilion, New York, la prima macchina per scrivere Sholes & Glidden, il fisico scozzese James Clerk Maxwell pubblicò un ponderoso trattato sull'elettricità e il magnetismo basato sul lavoro di Faraday, nel quale si legge: «La luce consiste di vibrazioni trasversali dello stesso mezzo che è causa dei fenomeni elettrici e magnetici». Improvvisamente la velocità della luce divenne un numero estremamente importante per la fisica. Le equazioni di Maxwell mostravano che elettricità e magnetismo sono componenti inseparabili di qualcosa di più generale. Elettricità e magnetismo erano come un'ombra cinese proiettata su un telo: i profili che osserviamo da una parte e dall'altra del telo sono simmetrici. Una corrente elettrica lungo un filo elettrico produce un campo magnetico. Viceversa, un magnete in movimento in prossimità di un filo elettrico genera cariche elettriche in movimento. Maxwell riuscì a modellizzare questo stato di cose, molto precisamente, per mezzo di appena quattro equazioni fra loro correlate, sufficienti a dar conto, in modo semplice e brillante, delle azioni a distanza che si esercitano lungo linee di forza invisibili.[8]

Così Maxwell diede una descrizione matematica del concetto di campo introdotto da Faraday. Le equazioni di Maxwell dimostrano che c'è un effetto ondulatorio, che possiamo visualizzare, semplificando, pensando a quel genere d'onde che si producono quando prendiamo in mano il capo di una fune, fissata a una parete nell'altra estremità, e l'agitiamo, imprimendo alla fune un insieme di scosse consecutive. La forza elettrica e quella magnetica si propagano da una certa sorgente di energia, punto per punto, dove assumono valori sempre variabili come in un'onda, lungo le linee di forza del campo di Faraday. Qualunque variazione della forza elettrica o magnetica è trasmessa attraverso il campo come un'onda che si propaghi lungo una corda vibrante. Inoltre, la variazione di forza magnetica induce una variazione di forza elettrica e viceversa. La simmetria di tale interazione genera un treno di onde tridimensionali che si inseguono e si corrispondono: le onde elettriche e magnetiche si sviluppano trasversalmente rispetto alla direzione di propagazione e su piani fra loro ortogonali.



Una variazione del campo elettrico induce una corrispondente variazione di campo magnetico, che a sua volta induce una variazione del campo elettrico e via dicendo. Il sistema costituito dal campo elettrico e da quello magnetico, un sistema dinamico di due quantità correlate e inseparabili, si sviluppa secondo una modalità che può essere modellizzata matematicamente come un'onda elettromagnetica tridimensionale. Le equazioni di Maxwell comportano che le onde magnetiche e quelle elettriche siano componenti inseparabili di una medesima entità che prende il nome, appunto, di onda elettromagnetica.

Poiché la trattazione di Maxwell procede per via di deduzioni puramente matematiche, le sue conclusioni, per quanto rigorose, apparivano pur sempre frutto di congettura: insomma, non provavano l'esistenza fisica delle onde elettromagnetiche. Le quali rimasero una congettura – largamente contrastata – per un quarto di secolo, finché il fisico tedesco Heinrich Hertz ne fornì l'evidenza fisica, mettendo a punto un esperimento che dimostrava l'esistenza delle onde radio, previste dalla teoria di Maxwell.

Era come se l'ultima tessera di un puzzle che per 2000 anni non aveva trovato soluzione fosse stata collocata al posto giusto. Il campo elettromagnetico non poteva essere visto, ma poteva irradiarsi come un'onda e poteva avere effetto ovunque nello spazio, purché quel punto si trovi nel percorso di propagazione dell'onda. Quando Maxwell calcolò la velocità delle onde elettromagnetiche rimase sorpreso vedendo che era uguale alla velocità della luce. Poteva essere una coincidenza? Poteva la luce, di per sé, essere una forma di radiazione elettromagnetica? Forse ciò che noi chiamiamo luce è una radiazione elettromagnetica di una certa lunghezza d'onda. Forse noi vediamo soltanto una piccola parte dello spettro completo delle onde elettromagnetiche. Avviene cioè qualcosa di analogo a quanto sperimentiamo riguardo ai suoni: infatti, siamo in grado di percepire soltanto una piccola parte dello spettro sonoro. Analogamente, forse ci sono onde elettromagnetiche la cui lunghezza d'onda non può essere percepita dall'occhio umano: sono le onde la cui lunghezza è troppo lunga o troppo corta per il nostro organo di senso.

Ora, se si mette in discussione la continuità della luce in quanto onda elettromagnetica, si mette in discussione la continuità di ciò che è soggetto al fenomeno ondoso. E allora, inevitabile, si affaccia la domanda: l'etere del quale lo spazio è riempito è continuo? In questo modo i paradossi di Zenone sul moto subiscono una trasposizione: non è più questione di luce visibile, ma di radiazione elettromagnetica.

Il campo elettromagnetico fu introdotto come un'entità fisica distribuita in tutto lo spazio, che può attirare o respingere (una carica elettrica o un polo magnetico) con una forza che segue la legge dell'inverso del quadrato, simile a quella che presiede all'attrazione gravitazionale. Per determinare il campo di forze si poteva solo misurare l'accelerazione di opportuni oggetti di prova immersi nel campo.

Le equazioni di Maxwell diedero una cornice matematica all'ipotesi ondulatoria formulata da Christiaan Huygens. Il risultato fu una sorta di generalizzazione della legge stabilita da Newton per la gravitazione universale. Infatti, le equazioni di Maxwell descrivono le relazioni e interazioni dei campi elettrici e magnetici con le cariche elettriche, come pure con i poli magnetici. Tali interazioni obbediscono anch'esse alla legge dell'inverso del quadrato delle distanze.

Inoltre Maxwell era riuscito in ciò che Cartesio molto tempo prima aveva affermato essere il fine ultimo della scienza, quello cioè di arrivare a esprimere compiutamente la natura per mezzo di poche leggi generali. Maxwell mediante quattro semplici equazioni (due coppie di equazioni simmetriche) fu in grado di esprimere la continuità del campo elettrico e magnetico, dimostrando come una variazione di uno dei due campi comporti una corrispettiva variazione dell'altro.

Sulla scia del lavoro di Maxwell la fisica classica conobbe due straordinarie revisioni. La prima è costituita dalla teoria della relatività, la seconda dalla teoria dei quanti. Più gli scienziati osservavano le modalità di movimento delle cose, più il mezzo attraverso il quale le cose si muovono appariva misterioso. Il calcolo infinitesimale aveva sposato, per così dire, il tempo con il movimento, e l'aveva fatto matematicamente. Maxwell diede inizio a un nuovo corteggiamento matematico, con lo spazio. Sbarazzandosi delle convenzioni della fisica tradizionale, Einstein li unì tutti in matrimonio: movimento, tempo e spazio.

12. La rivoluzione spazio-temporale

Circa dieci anni prima che Einstein desse alle stampe la sua famosa pubblicazione sulla teoria speciale della relatività, nel 1905, c'era un giovane che faceva i preparativi per un viaggio nel tempo, proiettandosi in un futuro distante 80000 anni, a bordo di un mezzo di trasporto in avorio, nichel e quarzo, che egli stesso aveva costruito. Descriverà la sua esperienza con queste parole: «Scivolavo come una gocciolina di vapore negli interstizi di sostanze che mi si facevano incontro», con la possibilità di essere sbalzato «da ogni possibile dimensione, andando incontro all'Ignoto».

Fece ritorno esattamente una settimana dopo: appariva appena un po' più vecchio del giorno in cui svanì dal suo laboratorio in un turbine d'aria opaca, di colore biancastro. La stanza era esattamente come l'aveva lasciata, gli attrezzi e le apparecchiature erano al loro posto. In preda a violente scosse e barcollando sulle gambe lunghe e dinoccolate, si levò di dosso la polvere e la sporcizia che si erano depositate sull'abito da sera, ormai logoro. Poco tempo dopo gli ospiti lo trovarono che fumava la pipa, carezzato da una brezza odorosa di lillà che dal giardino si insinuava nell'interno, attraverso un'alta porta-finestra. Era ansioso di raccontare questa sua avventura, veramente incredibile.

Il viaggio – che gli aveva dato una prospettiva preoccupante sulla discendenza della razza umana – doveva essere durato un bel po' più di un anno terrestre. Eppure al ritorno, proprio una settimana terrestre dopo, sembrava che per lui e i suoi ospiti il tempo fosse trascorso in pari misura.

H.G. Welles scrisse La macchina del tempo nel 1895. Non poteva sapere allora – non ancora – che il tempo non è assoluto; non sapeva che il tempo è strettamente connesso con lo spazio, ignorava che dipende dal sistema di riferimento adottato per la sua misura. Era consapevole però dell'affermazione di Zenone secondo cui «il moto è un'illusione» e concordava con Cartesio riguardo al fatto che la materia e il movimento del mondo esterno sono conosciuti soltanto per mezzo dei sensi. Non ci sono colori, non odori, né sapori se non quelli che ci presentano gli organi di senso. Dunque tutte le sensazioni sono illusorie. Einstein era sul punto di annunciare che «la distinzione tra passato, presente e futuro è soltanto un'illusione».

Tempo e spazio sono stati considerati ingredienti della fisica irrelati. Poi la velocità, misurata rapportando lo spazio al tempo, stabilì un legame matematico tra spazio e tempo. Si concepì che un oggetto potesse muoversi nello spazio, ma uno spostamento nel tempo sarebbe stato insensato prima della teoria della relatività formulata da Einstein.

Per tutto il XIX secolo, gli scienziati avevano dato per scontato che la luce si propagasse nell'etere. Lo si identificava con lo spazio, si assumeva che fosse continuo ed era pensato come il mezzo grazie al quale era possibile l'azione a distanza: costituiva perciò il sistema di riferimento per la determinazione del moto. Questo era quel che si riteneva prima che due scienziati americani si accingessero a sottoporre l'etere a verifica sperimentale.

Leonard Case jr., un ricco avvocato, aveva stabilito per lascito testamentario che la casa di famiglia divenisse sede della Case School of Applied Science. E così fu, quando morì, nel 1880. Era un edificio in pietra grigia, senza troppe pretese, con annesso un antico fienile: la tenuta dava su un ampio viale alberato con platani, vicino a un parco e a una piazza, nel centro di Cleveland, Ohio. Un anno dopo arrivò, in qualità di preside, Albert Michelson, che aveva appena compiuto ventinove anni. Non aveva alcun titolo di istruzione universitaria, ma il diploma dell'Accademia navale degli Stati Uniti, dove in seguito fu anche professore. Appena prese servizio, non indugiò un istante ad allestire, al secondo piano del fienile, i laboratori di chimica e fisica. La scuola contava sedici studenti, la retta di frequenza costava 100 dollari.

Dall'altra parte della strada, sul lato nord della ferrovia per New York, Chicago e St. Louis, si trovava la Western Reserve University, il cui corpo principale era nell'Adelbert Hall, un edificio in pietra calcarea giallognola di quattro piani, dal quale spiccava la torre dell'orologio, alta e slanciata. Edward Morley era un chimico autodidatta, professore di filosofia naturale e chimica alla Western Reserve ormai da tredici anni.

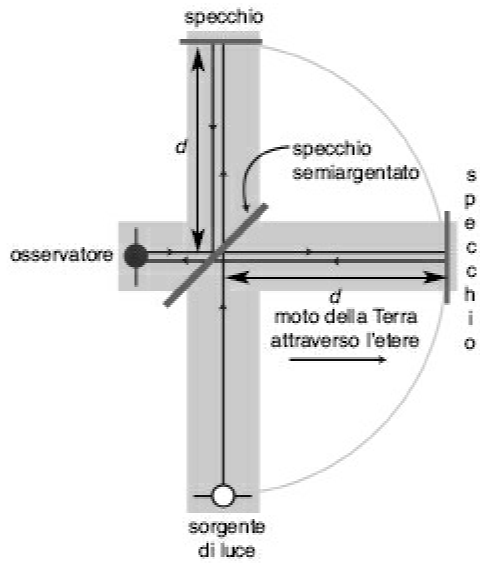
I due scienziati non avrebbero potuto essere più diversi. Michelson era quindici anni più giovane di Morley: era un uomo di bell'aspetto con gli occhi scuri, un'espressione profonda e sottili basette che giungevano al mento; era elegante e agnostico. Morley era il tipico professore immerso nei suoi pensieri, trasandato nel vestire, i capelli gli scendevano scompostamente sulle spalle. Era un uomo profondamente religioso, recitava i sermoni nella cappella del collegio universitario e nelle chiese del posto. I suoi mustacchi rossi erano maestosi, gli scendevano sulla bocca, quindi piegavano all'indietro raggiungendo le orecchie. Eppure i due scienziati avevano abitudini comuni. Michelson suonava il violino, Morley suonava l'organo. Erano entrambi fisici sperimentali, entrambi potevano vantare un'ottima manualità, entrambi erano molto precisi e attenti ai dettagli delle cose.

Michelson aveva costruito a più riprese strumenti che gli consentissero di misurare il cosiddetto «vento d'etere», l'ipotetico moto di trascinamento dell'etere rispetto alla Terra. Continuava a pensare a una voce dell'Enciclopedia britannica scritta da James Maxwell: «Se si potesse determinare la velocità della luce misurando il tempo che impiega ad attraversare la distanza che separa due postazioni sulla superficie della Terra, potremmo allora – misurando le velocità di propagazione nei due sensi opposti e confrontando i risultati – determinare le velocità dell'etere rispetto a queste postazioni terrestri».[1] Poco prima della morte di Maxwell, avvenuta nel 1879, apparve sulla rivista scientifica inglese Nature una sua lettera, nella quale il fisico scozzese metteva in dubbio la possibilità di determinare la velocità della luce con adeguata precisione, nel modo che aveva suggerito. Michelson era senz'ombra di dubbio al corrente della lettera di Maxwell, la quale deve avere avuto l'effetto di rinsaldarlo nel suo pensiero dominante, quello di misurare la velocità della luce, proprio nel modo e con la precisione postulati da Maxwell.

Quando Michelson disse a Morley che aveva in mente di verificare l'effetto dell'etere sulla velocità della luce, Morley suggerì la possibilità che lavorassero insieme nel suo laboratorio, posto nello scantinato dell'Adelbert Hall. Esperimenti intesi a determinare il vento d'etere erano già stati fatti, fin da quando Fizeau e Foucault fecero le loro misure della velocità della luce intorno agli anni 1850. Michelson aveva apportato alcune modifiche al metodo di Foucault, al tempo in cui si trovava all'Accademia navale, ma senza arrivare a risultati soddisfacenti. Quando Morley invitò Michelson a continuare questo genere di esperimenti nel suo laboratorio, Michelson non aveva titoli universitari, nemmeno il grado di baccelliere (bachelor), che si consegue al compimento del primo ciclo di studi superiori. Morley invece godeva già allora di fama internazionale per aver determinato le percentuali dell'ossigeno presente nell'aria, il peso relativo dell'ossigeno e dell'idrogeno nell'acqua, nonché il peso di un litro di ossigeno e di un litro di idrogeno.

Era il 1887 quando Michelson e Morley cominciarono a costruire la strumentazione per la misura dell'effetto dell'etere sulla luce. L'apparecchiatura doveva essere allo stesso tempo straordinariamente massiccia e di costruzione molto accurata, dal momento che la più piccola vibrazione avrebbe potuto vanificare la ricerca. Una piattaforma quadrata in pietra dello spessore di 36 cm galleggiava in una vasca contenente mercurio allo stato puro, cioè liquido, con la funzione di attenuare tutte le vibrazioni – naturali o artificiali – che potessero essere trasmesse all'apparecchiatura dalle viscere della Terra o dall'edificio in cui si svolgeva l'esperimento; nello stesso tempo il mercurio facilitava l'operazione di orientamento della base alla quale era solidale l'apparecchiatura di misura. (Non è difficile immaginare quale fosse l'atmosfera di quel laboratorio, impestata dai vapori di mercurio.) Le strutture di sostegno della vasca poggiavano direttamente sul letto roccioso sul quale insisteva tutto l'edificio.

Il sistema di misura comprendeva due bracci su ciascuno dei quali, a un'estremità, era montato uno specchio. Nell'altra estremità di uno dei due bracci era montata una sorgente di luce che emetteva un raggio luminoso, il quale nel suo percorso incideva su uno specchio semiargentato (si veda la figura nella pagina a fianco). A quel punto il raggio si divideva in due: circa la metà della luce proseguiva in linea retta lungo il primo braccio, la seconda metà veniva riflessa in direzione perpendicolare a quella del raggio incidente, lungo il secondo braccio. Gli specchi posti alle estremità di ciascun braccio riflettevano la luce ricevuta verso l'osservatore. Ora, se la Terra si sposta attraverso l'etere, la lunghezza d'onda del raggio di luce che percorre quello dei due bracci che è orientato come la direzione del moto della Terra (rispetto all'etere) dovrebbe subire una contrazione, dal momento che procede in direzione contraria al movimento dell'etere (rispetto alla Terra). Invece – come vedremo in seguito – la lunghezza d'onda del raggio di luce che percorre il braccio orientato perpendicolarmente alla direzione del moto della Terra dovrebbe subire una contrazione inferiore. In ogni caso i due raggi riflessi dovrebbero presentarsi sfasati all'osservatore: dunque dovrebbe essere possibile rilevare un fenomeno di interferenza, con la formazione delle caratteristiche frange di luce (ce ne siamo occupati nelle pagine precedenti, a proposito dell'esperimento di Young). In particolare, si dovrebbe assistere in questo caso a un fenomeno di interferenza cosiddetta distruttiva, con attenuazione dell'intensità di luce. Poiché l'esperimento prevedeva l'esistenza dell'etere, la piattaforma galleggiante era girevole, così da allineare uno dei suoi bracci con la direzione in cui la velocità della Terra rispetto all'etere risultasse massima.



Esperimento di Michelson-Morley: per prevedere l'eventuale ritardo con il quale i due raggi di luce si presentano all'osservatore è sufficiente analizzare i percorsi di andata e ritorno sulla lunghezza *d* di entrambi i bracci. Infatti, i due raggi di ritorno percorrono la stessa lunghezza, e nello stesso verso, dallo specchio argentato all'osservatore. Per il calcolo del ritardo – che peraltro non si manifesterà, essendo l'ipotesi di esistenza del «vento d'etere» infondata – si assume che il sistema di riferimento del laboratorio, solidale con la Terra, e quello solidale con l'etere siano inerziali. Vale pertanto la composizione galileiana delle velocità. I calcoli del risultato atteso sono sviluppati rispetto al sistema di riferimento solidale con l'etere.

Grande fu lo stupore di Michelson e Morley nel verificare che i due raggi di luce si presentavano all'osservatore perfettamente in fase. Né si notava alcuna differenza ruotando la piattaforma galleggiante – e con essa i due raggi perpendicolari – secondo diverse orientazioni. Si ebbe quello che fu conosciuto come «il più grande dei risultati negativi». Cioè, la velocità della luce non dipendeva dalla direzione del movimento o dalla velocità – rispetto all'etere – dell'osservatore e della sorgente di luce (che sono solidali con la piattaforma). Indipendentemente dalla velocità con cui la sorgente di luce si sposta rispetto all'etere ipotizzato, la velocità della luce è sempre la stessa.[2] I due fisici ipotizzavano che la Terra dovesse comunque muoversi rispetto all'etere (ma non sapevano quale fosse l'entità della velocità, né la sua direzione) se non altro perché la Terra percorre la sua orbita intorno al Sole alla velocità di 29 km/s. Perciò si aspettavano che la velocità del raggio di luce si componesse con quella del movimento della Terra rispetto all'etere, ipotizzato come il mezzo nel quale avviene la propagazione della luce. I risultati dell'esperimento contraddicevano l'aspettativa, e questo era molto strano.

Michelson suggerì allora che «la Terra trascina l'etere con sé, imprimendogli praticamente la sua stessa velocità, perciò la velocità relativa tra l'etere e la superficie della Terra è pari a zero, o molto piccola». Continuava a dare per scontato ciò che tutti gli scienziati fino a quel momento avevano sempre ipotizzato: l'esistenza dell'etere. Un esperimento che dimostrasse che le onde di luce non sono determinate nella loro propagazione dal movimento relativo all'etere doveva considerarsi un esperimento non riuscito. Ma il risultato atteso continuava a farsi desiderare. Perciò, «dal momento che il risultato dell'esperimento così come fu concepito in origine è stato negativo, il problema aspetta ancora di ricevere una risposta».

Quale allora poteva essere la spiegazione? Forse, nel momento in cui l'esperimento è stato eseguito, avveniva che la Terra fosse trascinata dall'etere (tutto il contrario di quanto si era presupposto), muovendosi come un sughero che galleggi nell’acqua, insieme con l’etere.[3] Per verificare questa ipotesi, Michelson e Morley decisero di ripetere l’esperimento sei mesi dopo, quando la posizione assunta dalla Terra della sua traiettoria orbitale fosse in opposizione rispetto a quella precedente. Se la Terra galleggia nell’etere, dovrebbe adesso, sei mesi dopo, procedere nella direzione opposta, rispetto all’etere. Ma, ancora una volta, i due raggi si presentavano all’osservatore in fase. Ruotando l’apparato di 90°, i raggi si presentavano ancora in fase, segno che la velocità nelle due direzioni di propagazione fra loro ortogonali era la stessa. Orientando la piattaforma in altre direzioni si otteneva sempre lo stesso risultato.

Due sono le ragioni che plausibilmente potrebbero spiegare questo risultato: 1) molto semplicemente, è sbagliata l’impostazione del calcolo matematico; 2) non esiste l’etere. Entrambe queste spiegazioni avrebbero inferto, se verificate, un colpo mortale alla fisica classica, secondo la quale non c’è dubbio che la matematica possa modellizzare la realtà, in qualche modo; inoltre, se si fosse dimostrato che l’etere non esiste – l’etere che è un po’ come l’oceano dell’Universo, l’etere che costituisce il sistema rispetto al quale è possibile assegnare una posizione a tutti i corpi, grazie al quale siamo in grado di descrivere ogni movimento –, ebbene, ciò significherebbe che il movimento assoluto è inconcepibile. Ma la teoria ondulatoria della luce avrebbe ricevuto un colpo ancora più serio. Come può la luce propagarsi prescindendo completamente da un mezzo di propagazione? In tal caso, che cosa sarebbe sottoposto a moto ondoso?

Due anni dopo l’esperimento di Michelson e Morley, il fisico matematico irlandese George Francis Fitzgerald spiegò l’esperimento affacciando l’ipotesi che forse le distanze lungo i due bracci sulla piattaforma galleggiante non fossero, di fatto, uguali. Forse la distanza misurata nel braccio orientato lungo la direzione del flusso dell’etere si contrae, proprio in ragione del fatto che si muove contro il vento dell’etere: ciò avviene, in particolare, se la velocità del braccio è confrontabile con quella della luce stessa. Forse, dunque, lo stesso strumento di misura è influenzato dalla direzione della misura.

Prima di arrivare alla spiegazione di Fitzgerald vediamo che cosa Michelson e Morley si aspettavano dall’esperimento, nell’ipotesi che esista l’etere e che, conseguentemente, esista il vento dell’etere. Allora:

1) se il raggio di luce si propaga in modo da attraversare l’etere nella direzione e nel verso del moto relativo della Terra (rispetto all’etere) e poi viene riflesso da uno specchio posto a una certa distanza d (corrispondente, nella figura di pagina 181, alla distanza fra lo specchio all’estremità del braccio e lo specchio semiargentato), allora:

– nel viaggio di andata, dallo specchio semiargentato all’estremità del braccio, il raggio si propaga – se assumiamo l’etere come sistema di riferimento – alla velocità $c + v$ (abbiamo indicato con c la velocità della luce e con v la velocità della Terra);
– nel viaggio di ritorno la velocità di propagazione rispetto all’etere sarà $c - v$: infatti, mentre nel viaggio di andata la luce procede nello stesso verso della sorgente di luce (tale possiamo considerare ai nostri fini lo specchio semiargentato) trasportata dalla Terra, in quello di ritorno procede in direzione contraria a quella della sorgente di luce

(per capire il significato di queste espressioni si consideri ancora una volta che abbiamo fissato come sistema di riferimento l'etere).[4]

Dunque il tempo del percorso di andata sarà, considerato che la velocità è uguale alla distanza diviso il tempo:

$$t_1' = \frac{d}{c+v}$$

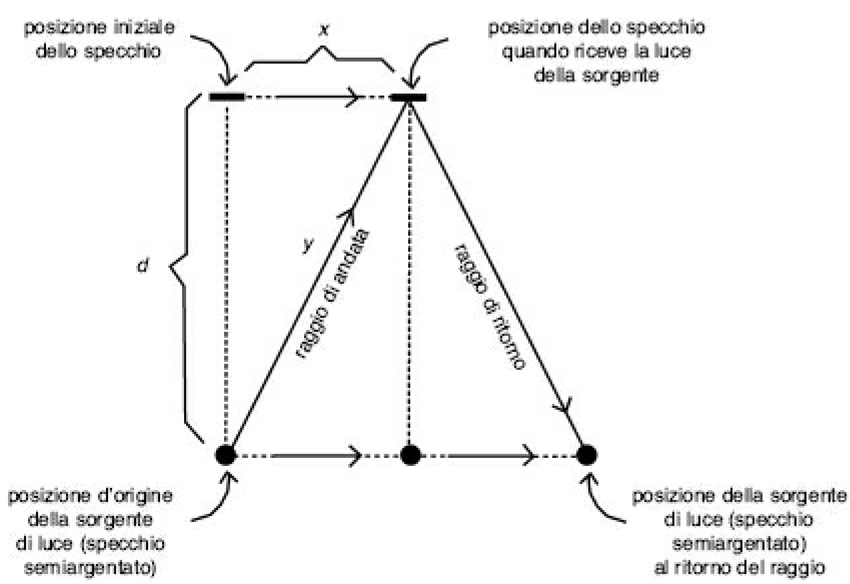
mentre il tempo impiegato dalla luce nel percorso di ritorno sarà:

$$t_1'' = \frac{d}{c-v}$$

Pertanto, nell'esperimento di Michelson e Morley il tempo di andata e ritorno, t_1, nel braccio orientato come il moto della Terra sarà:

$$t_1 = t_1' + t_1'' = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2}$$

2) Per calcolare il tempo di andata e ritorno nel braccio perpendicolare alla direzione del moto relativo della Terra, continuiamo ad assumere l'etere come sistema di riferimento. Chiamando anche in questo caso d la distanza tra lo specchio semiargentato (sorgente di luce secondaria) e lo specchio all'estremità del braccio (si veda la figura della pagina a fianco) si ha che mentre la luce si propaga, sia la sorgente di luce (lo specchio semiargentato) sia lo specchio si muovono trasversalmente, solidalmente con la Terra: perciò nel tempo che la luce raggiunge lo specchio, la stessa sorgente di luce e lo specchio si saranno spostati di una quantità x. La distanza coperta dal raggio di luce, y, viene allora facilmente determinata in base al teorema di Pitagora: $y^2 = d^2 + x^2$.



Siamo arrivati a una mossa decisiva del nostro ragionamento. Il raggio di luce e lo specchio riflettente posto all'estremità del braccio arrivano alla nuova posizione dello specchio simultaneamente. Questo significa che la luce deve spostarsi (sempre rispetto all'etere considerato come sistema di riferimento) di una quantità y a una velocità c, mentre lo specchio, nello stesso tempo, dovrà coprire la distanza x alla velocità v (che è la velocità della Terra). Perciò $y/c = x/v$. Di qui si ha che: $x = y\ (v/c)$. Introducendo questo valore di x nell'equazione $y^2 = d^2 + x^2$ (vedi sopra) si ha la seguente relazione:

$$y^2 = d^2 + \left(\frac{yv}{c}\right)^2$$

Risolvendo rispetto a y si ha:

$$y = \frac{dc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Sia nel percorso di andata, dalla sorgente allo specchio, sia in quello di ritorno, dallo specchio alla sorgente, il tempo trascorso sarà dato dalla distanza y divisa per la velocità c: i tempi di andata e ritorno sono uguali e il tempo totale di andata e ritorno nel braccio orientato perpendicolarmente al moto della Terra sarà:

$$t_2 = 2 \cdot \left(\frac{y}{c}\right) = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

3) Arrivati a questo punto, confrontiamo il tempo impiegato dalla luce nel percorso di andata e ritorno lungo il braccio parallelo alla direzione del moto con il tempo relativo all'altra direzione, perpendicolare. Rapportando i due tempi e applicando le normali operazioni algebriche si ha:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2d} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Osserviamo che per tutti i valori $v > 0$ il rapporto è > 1. Ciò significa che, se l'etere esiste, la luce impiega un tempo maggiore a compiere il tragitto di andata e ritorno lungo il braccio orientato parallelamente al moto della Terra, rispetto a quanto impiega propagandosi nell'altro braccio, perpendicolare al movimento della Terra. Nel caso in cui invece non esista l'etere o che – assumendo che l'etere esista – la sorgente di luce si sposti esattamente alla stessa velocità dell'etere, cioè nel caso in cui la Terra sia ferma rispetto all'etere, allora $v = 0$: in tal caso il rapporto tra i tempi è uguale a 1.

Per salvare insieme i risultati dell'esperimento di Michelson-Morley e l'ipotesi di esistenza dell'etere, Fitzgerald suggerì che la materia sia soggetta a una contrazione nella direzione del moto: così si spiegherebbe perché l'esperimento non abbia rilevato il vento d'etere. L'idea di fondo è semplice, anche se strana: il braccio orientato nella direzione del moto della Terra subirebbe una contrazione tale da compensare le differenze tra i tempi.[5]

Oggi, dopo che Einstein ha «buttato l'etere fuori dalla finestra dei laboratori di fisica» sappiamo che la ragione per cui l'esperimento di Michelson-Morley ebbe esito negativo non era la contrazione delle lunghezze. La ragione è che l'etere non esiste, dunque non si ha composizione delle velocità, e la velocità della luce è un invariante, non dipende dal sistema di riferimento. Ma il concetto di contrazione delle lunghezze, introdotto da Fitzgerald per salvare la nozione di etere, non scompare con l'etere. Al contrario, continuerà ad avere un preciso significato nella meccanica relativistica. Fu infatti lo stesso Einstein a dimostrare che la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi osservati da un sistema in movimento (relativo) corrispondono alla realtà delle cose e sono una conseguenza diretta della trasformazione relativistica delle coordinate (o trasformazione di Lorentz), sulla quale torneremo nelle prossime pagine.

La contrazione avviene nella direzione del moto e aumenta con la velocità del mobile. Se però la velocità del mobile non è elevata, la contrazione è trascurabile: per esempio, in un treno in corsa non sarebbe avvertibile. Ma nel caso in cui le velocità in gioco siano ragguardevoli, come per esempio nel caso delle particelle atomiche, la contrazione delle lunghezze diventa considerevole. Nel caso – del tutto ipotetico – di un righello della lunghezza l = 30 cm che si sposti longitudinalmente nello spazio a una velocità pari a metà di quella della luce, la sua lunghezza apparirebbe a un osservatore fermo poco maggiore di 26 cm. Infatti, applicando il fattore di contrazione di Fitzgerald (illustrato nella nota 5 di questo capitolo) si avrebbe:[6]

$$l' = l \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{da cui} \quad l' = 30 \cdot \sqrt{1-\frac{(c/2)^2}{c^2}} = 30 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{4}} \simeq 26\,\text{cm}$$

Quanto maggiore è la velocità del righello, tanto minore diventa la sua lunghezza. Alla velocità della luce la lunghezza si annulla del tutto: diventa zero. Una logica conseguenza di questa affermazione è che niente può muoversi più velocemente della velocità della luce nel vuoto, perché altrimenti gli oggetti in moto avrebbero una lunghezza negativa.[7]

Il fisico olandese Hendrik Lorentz elaborò una formula simile riguardo alla massa di un oggetto che si sposti a velocità molto elevata. La massa di una particella atomica in movimento non rimane costante, ma aumenta con la velocità. Se indichiamo con m_0 la massa a riposo di una particella, la sua massa m a una velocità v qualsiasi sarà data dall'espressione:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Perciò un righello del peso di m = 30 g (a riposo) viaggiando a metà della velocità della luce avrebbe una massa superiore, pari a circa 34,6 g:

$$m' = \frac{30}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{30}{\sqrt{3/4}} \simeq 34,6 \text{ g}$$

Alla velocità della luce la sua massa dovrebbe essere infinita. Dunque l'incremento di massa secondo Lorentz è l'analogo della contrazione secondo Fitzgerald: infatti, nella formula che stabilisce la relazione tra massa a riposo e massa in movimento, vediamo a denominatore lo stesso fattore di moltiplicazione che appare nella formula della contrazione delle lunghezze.

Qui la matematica ci fa vedere qualcosa che è in contraddizione con la nostra intuizione del mondo fisico, basata sul senso comune. Potevano le idee di Fitzgerald e di Lorentz essere dimostrate – anche indirettamente – per mezzo di qualche esperimento? Un'idea potrebbe essere quella di verificare le variazioni di massa di un elettrone. Considerato che la carica di un elettrone non aumenta né diminuisce con la velocità, l'esperimento consiste nel determinare il rapporto tra la sua massa e la sua carica misurando la deflessione della sua traiettoria in un campo magnetico. Un aumento del rapporto massa/carica con l'aumentare della velocità implicherebbe un aumento della massa in relazione alla velocità: si avrebbe così una dimostrazione indiretta della veridicità dell'ipotesi di Lorentz. Nel corso di un'indagine svolta nel 1897 a Berlino, finalizzata allo studio della deflessione subita dalla traiettoria degli elettroni assoggettati, in tubi a vuoto, a campi elettrici e magnetici, il fisico tedesco Walter Kaufmann fu in grado di scoprire che il rapporto massa/carica effettivamente aumenta con la velocità.[8]

La prima formulazione della teoria della relatività – quella del 1905, la teoria speciale della relatività – postulava che niente può essere più veloce di un fotone, che è una particella elementare, il cosiddetto «quanto di luce». Ma che dire della gravità? Con quale velocità si propaga l'interazione di gravità? Per esempio, con quale tempestività sarebbe avvertita sulla Terra una massa che abbia avuto origine in qualche parte dell'Universo, a un miliardo di chilometri di distanza? Certo, questo evento non potrebbe essere avvertito istantaneamente nella Terra, perché ciò significherebbe che qualcosa – l'informazione riguardo a questa nuova esistenza – ha potuto coprire una distanza di un miliardo di chilometri a una velocità maggiore di quella consentita al fotone: il che è in contraddizione con la teoria speciale della relatività.

Le equazioni della gravitazione universale di Newton costituiscono un eccellente modello matematico della gravità, grazie al quale possiamo fare previsioni molto accurate. Tuttavia il modello non ci spiega il «funzionamento» della gravità, né ci dice come la gravità si propaga, o che cosa essa sia.

Da Newton in poi la gravità non ha mai cessato di essere un mistero, anzi. Secondo la teoria speciale della relatività, se ci troviamo in un treno senza finestrini che procede a velocità costante, non siamo in grado di avvertire il movimento: infatti, non siamo in grado di avere percezione del movimento, a meno che non lo rapportiamo a qualcos'altro che possiamo osservare. Di fatto, tutte le leggi del moto (come pure tutte le leggi della fisica) apparirebbero le stesse a chiunque viaggiasse su tale treno senza finestrini. Siamo però in grado di avvertire il movimento se siamo assoggettati a un’accelerazione: lo avvertiamo anche se ci troviamo a viaggiare in un treno senza finestrini, come del resto lo avvertiamo nella cabina chiusa di un ascensore, nelle fasi di accelerazione, cioè alla partenza e all’arrivo. Avvertiamo tale accelerazione sotto forma di gravità. L’idea fondamentale è che la gravità e l’accelerazione sono così strettamente connesse l’una con l’altra che lo studio del movimento di un oggetto, di per sé, è sufficiente per comprendere il fenomeno della gravità.

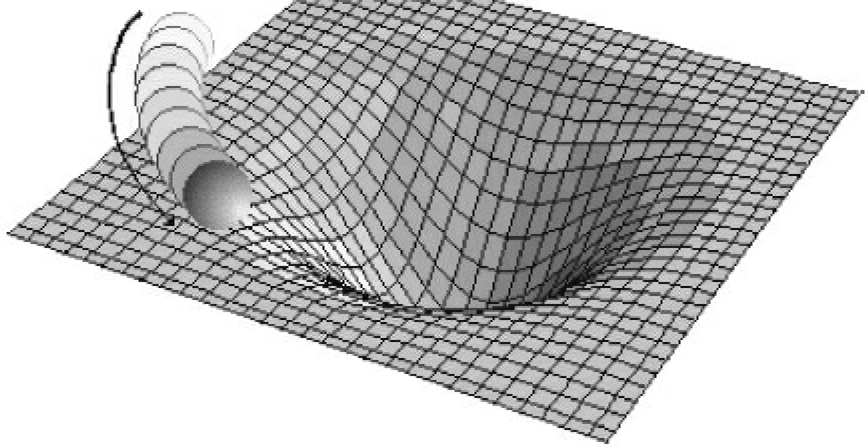
La spiegazione offerta da Newton del perché la Luna continua a orbitare intorno alla Terra è incentrata sull’interazione di gravità tra Terra e Luna: nel continuo tiro alla fune fra queste due masse, la Terra ha il sopravvento e attrae verso sé la Luna che altrimenti proseguirebbe nel suo moto secondo una traiettoria rettilinea. L’orbita quasi circolare è il risultato della combinazione di questi due movimenti, del movimento rettilineo e di quello di caduta della Luna sulla Terra: è come se la Luna fosse legata alla Terra da una fune. Ma di che cos’è fatta questa fune straordinariamente lunga e invisibile?

La risposta è fornita dalla teoria generale della relatività, pubblicata da Einstein nel 1915, in cui si fa ricorso a una geometria intuitiva e semplice. Per darne conto, possiamo semplificare le cose e immaginare che lo spazio abbia due dimensioni invece che tre. Questa semplificazione si presta a una visualizzazione efficace: infatti, si libera una dimensione che ci consente di osservare lo spazio da una dimensione superiore, analogamente a quanto facciamo osservando la pagina bidimensionale di questo libro, essendo fuori del libro.

Immaginiamo allora di osservare – da una terza dimensione – uno spazio bidimensionale che si estenda all’infinito, un’enorme superficie piatta. Immaginiamo inoltre che la materia costituente questo spazio sia un tessuto estensibile come quello di un trampolino elastico, e che una massa collocata sulla sua superficie provochi un cedimento locale e conseguentemente un avvallamento dell’area circostante.

Ogni depressione della superficie rappresenta una massa: maggiore è la massa, più larga e profonda è la depressione. Una sfera posizionata sulla superficie di questo trampolino elastico sarà indotta a rotolare con una velocità e un’accelerazione che sono funzione della presenza più o meno vicina di avvallamenti come quello mostrato nella figura a pagina seguente. Nello spazio tridimensionale abbiamo avvallamenti analoghi, ma la loro rappresentazione tridimensionale è molto più difficile.

Rotolando lontano dagli avvallamenti della superficie, la sfera avrà una traiettoria rettilinea, come c’è da aspettarsi in uno spazio euclideo: infatti, rotola in una regione del nostro modello che possiamo ragionevolmente considerare piatta. In prossimità di un avvallamento, entra in gioco il meccanismo di attrazione gravitazionale, come previsto da Newton. Ma l’analogia del trampolino elastico è valida solo in quanto ci dice che lo spazio intorno alle masse è «curvato» dalla gravità; dobbiamo tenere presente, perciò, che la sfera che rotola su questa superficie non cade in fondo alla buca, ma prosegue lungo una linea di «minor percorso», detta geodetica. Secondo la teoria generale della relatività lo spazio è curvo: tanto più è curvo, quanto maggiore è la massa che ne determina l’incurvatura. Dove non c’è massa, lo spazio è piatto.



Questa nuova geometria dello spazio ci dà modo di capire come le masse in movimento nello spazio esercitino una forza. La fune misteriosa e invisibile che trattiene la Luna in orbita intorno alla Terra non è altro che una geometria spaziale infossata. Masse maggiori comportano depressioni più profonde. Masse in movimento determinano la formazione di avvallamenti in movimento, tanto maggiori quanto maggiore è la massa. Abbiamo così un quadro dell'Universo che è come un turbinio di avvallamenti mobili: alcuni fluttuano e orbitano come satelliti intorno ad avvallamenti più attrattivi (cioè più profondi); altri sono assorbiti da avvallamenti vicini, come bolle di sapone che si spostino da un punto all'altro dello spazio e che si inglobino l'un l'altra.

Tale è dunque la geometria della teoria generale della relatività, una geometria «infossata» nella quale il percorso più breve tra due punti è dato non da un segmento di retta, come nella geometria euclidea, ma da una linea geodetica. L'Universo della relatività generale non è euclideo: perciò nel nostro modello, cioè nell'analogia del trampolino elastico, un segmento di retta è «rettilineo» soltanto in questo senso, nel senso cioè che rappresenta il percorso più breve, da un'estremità all'altra. Osserviamo inoltre che la forza di attrazione gravitazionale è in relazione con la pendenza delle pareti dell'avvallamento: è tanto maggiore quanto più ci si avvicina al centro.

Dunque ammettiamo che la Luna viaggi inizialmente (per esempio, al tempo della formazione del sistema solare) in linea retta e che nel suo percorso appaia improvvisamente la Terra, la cui azione si esplica in forma di un avvallamento dello spazio: la Terra determinerebbe delle ondulazioni nella tessitura dell'Universo, proprio come farebbe una boccia da bowling su un trampolino elastico. Queste ondulazioni si propagherebbero radialmente dal baricentro della Terra e andrebbero attenuandosi via via che procedono – con la velocità della luce – verso lo spazio esterno: in questo quadro, la gravità non esercita istantaneamente la sua azione su masse che si trovano a miliardi di chilometri di distanza.

In questa geometria l'Universo è relativamente accidentato, con avvallamenti presenti dappertutto, dove vi sia una massa: ma le buche disseminate in questa superficie presentano un andamento «liscio», non ci sono cioè discontinuità, neanche in corrispondenza di masse considerevoli. Tale levigatezza dello spazio – che in termini di calcolo infinitesimale significa che esso è differenziabile indefinitamente – richiede la continuità dello spazio.

Ciò che vale per lo spazio vale anche per il tempo. Se la gravità è un'altra forma di accelerazione, allora l'accelerazione – dunque, anche il tempo, essendo l'accelerazione una grandezza definita attraverso il tempo – è strettamente connessa allo spazio, ed entrambi, il tempo e lo spazio, sono incurvati dalla gravità. Questa è l'essenza della rivoluzione spazio-temporale. L'accelerazione implica una componente temporale, dunque c'è una dimensione – il tempo – che è stata ignorata allorché abbiamo istituito l'analogia del nostro trampolino elastico disseminato di buche. Ma come possiamo visualizzare il tempo alla stregua di una dimensione speciale?

In primo luogo dobbiamo intenderci su che cosa significa «dimensione». Per i matematici «dimensione» è una sorta di metafora delle dimensioni spaziali del nostro mondo reale, una generalizzazione della parola «dimensione (spaziale)».

Gli scrittori di fantascienza hanno spesso avanzato l'ipotesi che, qualora trovassimo il modo di saltare da una dimensione all'altra, potremmo andare avanti e indietro nel tempo e mettere in atto ogni sorta di sortilegi riguardo alla nostra mente e al nostro corpo. Ciò corrisponde al fatto che usiamo la parola «dimensione» in senso lato: una reminiscenza della sua origine come misura dell'ambiente che cade sotto la nostra percezione visiva. Perciò diciamo che una tenda presenta questa larghezza e questa altezza, che un divano ha una certa lunghezza, una certa profondità e una certa altezza ecc. Analogamente abbiamo la tendenza a pretendere di visualizzare le dimensioni superiori tutte le volte che veniamo a sapere che un matematico vi faccia ricorso per risolvere un problema: ma queste dimensioni sono soltanto una disposizione ordinata di misure in senso lato, sono cioè funzioni o numeri. I fisici usano tali disposizioni nelle loro equazioni per descrivere il mondo.

Un punto nello spazio è individuato dal suo indirizzo (x, y, z), dato dai tre numeri reali che misurano le sue coordinate lungo gli assi x, y e z. Se quel punto si sposta lungo la direzione dell'asse x a una certa velocità (non necessariamente uniforme), potremmo rappresentare quella velocità con un quarto numero v_x etichettabile come «quarta dimensione». In questo caso disporremmo non soltanto dell'indirizzo di quel punto, ma anche dell'informazione relativa a quanto velocemente quel punto si sposta nella direzione dell'asse x; tale informazione è disponibile per ogni punto, cioè per ogni terna (x, y, z). Oppure, per conservare traccia degli eventi con il trascorrere del tempo, possiamo pensare a un indirizzo quadridimensionale (x, y, z, t), dove t rappresenta il tempo.

Dunque viviamo in quattro dimensioni. Dovremmo però tener presente che questo è uno schema mentale per capire il mondo attraverso la matematica. «Dimensione» è una parola coniata dall'uomo, non è una parola tramandata da Dio.

Il grande vantaggio della notazione (x, y, z, t) è che ci dà modo di registrare convenientemente il passato e il futuro di un punto in movimento. Consideriamo il caso in cui la velocità v_x dipenda dalla posizione del punto nello spazio tridimensionale. Per esempio, potrebbe essere: $v_x = x + y + z$. In tal caso il punto potrebbe essere rappresentato da questa quaterna di numeri: $(x, y, z, x + y + z)$. Quattro sono dunque le coordinate ma l'ultima dipende dalle altre tre: pertanto la posizione e la velocità del punto in movimento sono determinate da soli tre numeri, e non si ha un aumento della dimensionalità. Se il punto si muove in uno spazio tridimensionale, possiamo pensare, con l'introduzione della quarta coordinata, che si muova su una superficie tridimensionale in uno spazio quadridimensionale.

Secondo il matematico russo-tedesco Hermann Minkowski, il mondo non è tridimensionale come sempre l'abbiamo pensato, ma quadridimensionale: i suoi punti sono descritti dalla quaterna (x, y, z, t) nel cosiddetto continuo spazio-temporale. Ciò significa che qualsiasi evento o movimento in essere – una freccia in volo nello spazio, oppure voi che ve ne state fermi, o che leggete questo libro – è rappresentato da un qualche diagramma nel continuo spazio-temporale. Questo diagramma – chiamato linea di Universo o anche linea oraria – traccia il progredire dell'evento con il trascorrere del tempo: può essere una linea diritta, una curva o un'area. Spazio e tempo sono espressioni di un'unica quantità, lo spazio-tempo. Scrisse in proposito Minkowski: «Battezzeremo il mondo con la molteplicità di tutti i sistemi di valori di x, y, z, t che siamo in grado di pensare».[9] L'ultima variabile, come abbiamo visto, è il tempo. Se una qualsiasi delle variabili subisce una variazione, anche minima, cambia parimenti la posizione del punto nella tessitura delle dimensioni spazio-temporali. Sennonché il tempo non è completamente indipendente dalle tre dimensioni spaziali: in base alle trasformazioni di Lorentz, sappiamo che il tempo determinato in un certo sistema di riferimento si dilata lungo certe direzioni dello spazio quando sia osservato da un secondo sistema di riferimento.[10]

Possiamo renderci conto di questa affermazione ragionando in una dimensione soltanto, per esempio considerando la sola coordinata x. In questo caso abbiamo che fare con uno spazio-tempo di due sole dimensioni (x, t). Immaginiamo dunque di voler confrontare la misura del tempo eseguita in un primo sistema di riferimento S(x, t) con quella eseguita in un secondo sistema di riferimento S'(x', t') che si sposta con velocità v lungo l'asse x di S. Le trasformazioni di Lorentz ci dicono come passare dalle coordinate di S a quelle di S':

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - x \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

In queste equazioni, al solito, v è la velocità del secondo sistema di riferimento rispetto al primo, c è la velocità della luce.

Dalle trasformazioni di Lorentz discendono, in base a semplici ragionamenti e a un po' di algebra, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi considerate nelle pagine precedenti.

Riassumendo, anche il tempo presenta una curvatura, come lo spazio. Vediamo adesso che cosa succede manipolando opportunamente le ultime due equazioni. Con un po' di passaggi algebrici, tutto sommato semplici anche se lunghi, si arriva alla seguente espressione:

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

dove Δx e Δt sono, rispettivamente, le variazioni di luogo e di tempo di un evento per un osservatore solidale con il primo sistema di riferimento; Δx^1e $\Delta t'$ sono, rispettivamente, le variazioni di luogo e di tempo di un evento per un osservatore solidale con il secondo sistema di riferimento. Il fatto che la quantità del membro di destra sia uguale alla quantità del membro di sinistra significa che due osservatori solidali con il primo e il secondo sistema di riferimento attribuiscono lo stesso valore numerico a $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2$, che possiamo indicare con il simbolo Δs^2. Dunque:

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 \ = \ \text{invariante}$$

Pertanto Δs^2, «invariante» dello spazio-tempo, non dipende dal sistema di riferimento. Si osservi inoltre che un'equazione della forma $a^2 = x^2 - y^2$, dove a è una costante, rappresentata graficamente sul piano cartesiano, ha per grafico un'iperbole. Dunque, Δs^2 rappresenta un'iperbole nello spazio bidimensionale le cui coordinate sono x e t.

Immaginiamo adesso di vincolare una sfera a una fune e di farla girare tutt'intorno molto velocemente. La sfera è sottoposta a un'accelerazione tangenziale (la sua velocità continua a cambiare direzione, pur mantenendo un valore costante). Pertanto si ha una curvatura dello spazio-tempo. Un osservatore solidale con la sfera in movimento che volesse misurarne la circonferenza troverebbe – in base alla trasformazione di Lorentz – che tale misura è maggiore di quanto è previsto da un calcolo svolto nell'ambito della geometria euclidea, cioè nell'ipotesi di uno spazio «piatto», e non incurvato. Il fatto è che una circonferenza tracciata nello spazio-tempo di Minkowski non giace su una superficie piana, ma è come se fosse tracciato sulla superficie di una sella di cavallo: lo spazio di Minkowski è uno spazio iperbolico, nel quale non si applicano le normali procedure di calcolo per la determinazione delle distanze, come nello spazio della geometria euclidea.

Nella geometria euclidea vale il teorema di Pitagora: la distanza Δs tra due punti le cui coordinate differiscano Δx e Δy è data dalla relazione $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Nello spazio-tempo di Minkowski, invece, il quadrato della distanza non è più uguale alla somma dei quadrati della proiezione della distanza sugli assi x e t. In questo particolare spazio-tempo a due dimensioni, che non è più euclideo ma iperbolico, si ha invece: $\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$.

Nello spazio-tempo a quattro dimensioni avviene esattamente l'analogo. Qui Δs rappresenta il modulo del vettore «spostamento» e il suo quadrato prende il nome di «intervallo invariante», indipendente dal sistema di riferimento. Esso vale:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$$

dove Δx, Δy e Δz rappresentano gli incrementi di ordinata spaziale di un evento spazio-temporale e Δt è l'incremento temporale. Si noti che questa relazione si riduce al teorema di Pitagora, applicato allo spazio euclideo, quando sia $\Delta t = 0$, quando cioè l'evento spazio-temporale sia isocrono: quando, in altre parole, le coordinate spaziali non subiscano variazioni nel tempo. Com'è noto, infatti, la distanza tra due punti nello spazio euclideo è data dalla relazione: $\Delta s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La teoria generale della relatività, che ci dà una prospettiva dello spazio su scala astronomica, stabilisce una relazione tra lo spazio e il tempo in un Universo curvo quadridimensionale nel quale la massa di un oggetto non è più costante, non coincide cioè con la massa a riposo (massa a velocità 0) ma dipende dalla velocità della massa stessa, come abbiamo visto precedentemente. Pur dipendendo dalla velocità, la massa relativistica di un oggetto conserva la proprietà, stabilita dal secondo principio della dinamica formulato da Newton, per cui la forza agente è uguale alla massa moltiplicata per l'accelerazione.

Einstein è più che una celebrità, è un mito. Molto si è favoleggiato sulla sua mente brillante che tuttavia non gli procurò un contratto di ricerca, nemmeno come assistente, in una rispettabile istituzione accademica. Il suo professore Hermann Minkowski lo definì «un cane pigro che mai si è minimamente curato della matematica».[11] Ma è vero. Anche quando frequentava la scuola elementare a Monaco, i suoi maestri dicevano che, riguardo alle materie scientifiche, per lui non c'era speranza. Per tutto il periodo delle scuole elementari e al ginnasio fu un ragazzo infelice e a scuola non eccelleva. A quindici anni fu espulso per comportamento indisciplinato e mancanza di rispetto nei confronti dei professori.

Evidentemente la scuola non è l'unica fonte di stimoli intellettuali. Come altre volte è successo a molte persone di valore che ebbero un difficile rapporto con la scuola, per far sprizzare la scintilla dell'ingegno di Einstein bastò un solo mentore che ne apprezzasse le qualità. Il mentore di Einstein fu lo zio Jacob, un ingegnere elettrotecnico che passava con lui ore e ore a parlare di scienza e di elettricità. Einstein non era riuscito a superare l'esame di ammissione al Politecnico di Zurigo e dovette fare studi di riparazione presso il ginnasio della cittadina svizzera di Aarau. L'anno successivo fu ammesso al prestigioso Politecnico nel quale conseguì, nel 1900, il diploma di laurea, ma non il dottorato di ricerca.

Nel 1902, secondo il giudizio dei suoi professori, non aveva le qualità per ambire a una posizione accademica. Per guadagnarsi da vivere accettò vari lavoretti precari e di poco conto, finché ebbe il posto di impiegato nell'Ufficio brevetti di Berna. Nel tempo in cui ebbe quest'occupazione si applicò, nelle ore di libertà, allo studio di problemi scientifici. Nel 1905 ancora non aveva conseguito un dottorato di ricerca, ma diede alle stampe tre pubblicazioni che scossero dalle fondamenta l'edificio della scienza newtoniana. Facendo ricorso a una matematica molto elementare, fu in grado di arrivare alla sconvolgente affermazione che anche il tempo è relativo, come la lunghezza di Fitzgerald e la massa di Lorentz.[12] Le cose presero una piega inimmaginabile.[13]

In una lettera al filosofo inglese Herbert Samuel, Einstein scrisse che la realtà fisica è percepita dai nostri organi di senso ed è filtrata dal nostro intelletto. A proposito del tavolo che si trovava nella sua stanza, suggerì che fosse «puramente e semplicemente un complesso di sensazioni» alle quali assegnava un concetto e un nome: «C'è il pericolo di essere fuorviati dall'illusione che la "realtà" della nostra esperienza quotidiana "esista realmente" e che certi concetti della fisica siano "pure idee" separate dalla "realtà" da un braccio di mare non che non sarà mai possibile attraversare. Di fatto, presupporre una “realtà” esistente indipendentemente dalle mie sensazioni è il risultato di una costruzione intellettuale. Avviene che abbiamo più fiducia in queste costruzioni che nelle interpretazioni sviluppate dai dati sensoriali».[14]

Il continuo spazio-temporale a quattro dimensioni ci dice parecchio sullo spazio osservato da distanze siderali. Ci dice che è «liscio», nel senso che è differenziabile indefinitamente:[15] se immaginiamo lo spazio come la superficie di un trampolino elastico, è come dire che in tutte le sue regioni, anche le più accidentate, è sempre possibile individuare un piano tangente alla superficie stessa. A parte quegli «incidenti» chiamati buchi neri, che sono come dei picchi nello sviluppo spaziale del trampolino elastico, gli avvallamenti prodotti dalla presenza di masse notevoli sono sempre abbastanza lisci, se osservati da vicino. Purtroppo la teoria generale della relatività vede bene le cose di lontano, ma non è in grado di cogliere la tessitura microscopica dello spazio. Per questo dobbiamo rivolgerci alla fisica quantistica, e non è un passaggio semplice. Einstein lo fece, ma ne fu sconcertato, come pressoché chiunque in quel momento.

13. Oplà! La struttura delle cose è nuovamente granulare

Al volgere del XX secolo, l'imperialismo europeo aveva diviso il mondo in zone d'influenza. Il continente aveva goduto di venticinque anni di pace, un periodo relativamente lungo, anche se la guerra covava sotto le ceneri, dappertutto nel vasto mondo. In Germania, dove si faceva un gran parlare di un «posto al sole», si produceva più acciaio che in Francia e in Gran Bretagna. L'industria chimica e quella manifatturiera tedesca continuavano a progredire, tanto da superare quella inglese. La Germania era di gran lunga il paese con il più elevato grado di istruzione nel mondo, vantava inoltre una politica e un sistema industriale che promuovevano la ricerca di base senza la contropartita di un guadagno immediato, cosa a quel tempo inusitata. Il solido sistema educativo della Germania imprimeva una spinta vigorosa alla ricerca scientifica, i cui risultati erano immediatamente trasferiti all'industria da parte dei giovani freschi di studio. Gli industriali manifatturieri inglesi, temendo che «la scienza se ne andasse all'estero, come un figlio poco amato in famiglia» gridavano al tradimento. Ritenevano sbagliato che il paese fosse nelle mani di «una classe di intellettuali screditata, che però accampava la pretesa di mettere il naso negli affari di imprenditori che non avevano bisogno di loro».[1]

A Berlino i caffè erano sontuosi: i soffitti erano alti e imponenti, le colonne dorate. Non meno sontuosi erano i teatri e gli auditorium la cui architettura compendiava efficacemente lo spirito dell'epoca ed era insieme una testimonianza di orgoglio civico. Tutto questo avveniva nel momento in cui musicisti dell'area culturale tedesca – Mahler, Brahms, Strauss – dirigevano sempre nuove opere da essi composte. Ogni mattino il treno portava dai vivai di Hannover le cassette di orchidee che avrebbero ornato le tovaglie di lino bianco delle Teehäuser lungo la Leipzigerstrasse, dove avevano l'abitudine di incontrarsi, davanti a uno strudel e a un caffè, signore vestite di abiti sgargianti e uomini in abito completo, compreso il panciotto. Le signore indossavano cappelli enormi; non era decoroso mostrare le caviglie in pubblico, ma questo non impediva che i vestiti più eleganti mettessero in mostra il seno. Si costruivano navi da crociera con tanto di sala da concerto: lasciavano il porto di Bremerhaven, nel Mare del Nord, per attraversare l'Atlantico. I treni frattanto trasportavano cannoni grandi come case. Nel quartiere esclusivo di Tiergarten si costruivano ville e palazzi con soffitti alti più di quattro metri. La classe media a Berlino si espandeva talmente da diventare pressoché la maggioranza della popolazione.

L'elettrone era stato scoperto di recente come una parte di materia la cui massa ha un ordine di grandezza pari a soltanto un millesimo della massa di un atomo di idrogeno. Però si sapeva ben poco della struttura degli atomi, neanche di quella dell'atomo più semplice: il mondo scientifico aveva appena cominciato a riprendersi dallo sconcerto di aver appreso che l'atomo non è più indivisibile.

Zenone voleva che prendessimo in considerazione posizioni indefinitamente vicine l'una all'altra e che trovassimo una spiegazione per il movimento di una freccia che si sposta da una posizione all'altra. Non sapeva che neanche i matematici sono in grado di identificare nello spazio due posizioni adiacenti, dal momento che non c'è punto su una retta che possa dirsi successore di un altro punto. Tuttavia in seguito, grazie al calcolo infinitesimale, i matematici sono stati in grado di descrivere come un oggetto in movimento possa trascorrere da una posizione all'altra, assegnando all'oggetto un unico valore di posizione spaziale e un unico valore di velocità, in corrispondenza di un qualsiasi valore della variabile «tempo».

Aristotele pensava che la materia mantenesse le sue proprietà, via via che la si sminuzza, fino ad arrivare agli atomi «indivisibili»: un pezzo di legno continua a essere legno anche se ridotto in parti sempre più piccole, anche dopo che è diventato segatura, giù giù fino ai suoi costituenti intimi. Alla fine del XIX secolo la concezione atomistica fu aggiornata con l'introduzione di due nuove ipotesi: a) la realtà potrebbe non essere omogenea fino in fondo, come riteneva Aristotele; b) i nostri sensi potrebbero restituirci una descrizione della natura non rispondente alla realtà. Sembrò allora che la matematica che si rivelava idonea per descrivere ciò che si osserva a livello di laboratorio dovesse essere diversa dalla matematica necessaria per descrivere la materia a livello atomico.

Nel 1897 il fisico inglese J.J. Thomson scoprì la prima particella subatomica, l'elettrone, la particella più leggera fra quelle conosciute che abbiano una massa a riposo non nulla. Nel 1919 il fisico nucleare neozelandese Ernest Rutherford scoprì il protone. Quando James Chadwick scoprì il neutrone nel 1932, il numero delle particelle elementari conosciute salì a tre: si riteneva allora che questi costituenti dell'atomo non fossero riducibili a particelle ancora più piccole. Oggi invece sono centinaia le particelle elementari conosciute: sono state identificate in laboratorio, negli acceleratori, o nello studio dei raggi cosmici provenienti dallo spazio esterno. Alcune di queste particelle, come i leptoni, hanno un diametro inferiore a 10^{-19} cm.

L a fisica quantistica, che ci permette di osservare più profondamente il mondo subatomico, non si salda facilmente con la teoria generale della relatività. Se il mondo fosse ordinato come la scienza si aspetta che sia, vi sarebbe un'unica teoria compatibile sia con la teoria generale della relatività, sia con la teoria dei quanti. Avremmo in tal caso un modello duttile, tale da poter essere utilizzato sia come telescopio per colmare in men che non si dica distanze enormi, sia come microscopio, per visualizzare gli oggetti di scala subatomica. Sarebbe questo un modello regolabile con continuità operando su un parametro che abbia l'effetto di contrarre lunghezze ragguardevoli oppure, al contrario, di dilatare lunghezze molto piccole.

Si riteneva che la meccanica post-newtoniana avesse dato risposta ai problemi posti da Zenone. Grazie al calcolo infinitesimale, il movimento poteva essere convenientemente rappresentato da una funzione continua della posizione rispetto al tempo. Lo studio di tale funzione, infatti, insieme a quello delle sue derivate, consente di determinare posizione, velocità e accelerazione. Inoltre il calcolo infinitesimale ha messo nelle nostre mani uno strumento – diciamo così – predittivo: equazioni differenziali. Data la conoscenza delle forze agenti e delle condizioni iniziali di un qualsiasi oggetto, l'analisi del problema eseguita con le equazioni differenziali consente di prevedere precisamente e senza ombra di dubbio quale sarà la posizione di quell'oggetto in un qualunque istante futuro.[2] Per secoli si è pensato che la materia potesse essere localizzata nello spazio assegnandole un indirizzo relativo a una certa condizione iniziale e una sua caratterizzazione in termini di energia e quantità di moto. Si era pensato un tempo che se di una particella si conoscono la posizione, l'energia e la quantità di moto in un certo istante iniziale, allora sarà possibile determinare in qualunque istante futuro la sua nuova posizione, la nuova energia e la nuova quantità di moto. Ebbene, la meccanica quantistica negava che ciò fosse possibile.

Nel 1927 Werner Heisenberg lavorava all'Università di Gottinga, una deliziosa cittadina cinta da una cerchia di mura, posta lungo il fiume Leine e attorniata da una chiostra di montagne, famosa per i suoi tigli, le salsicce, la birra, e prestigiosa per la sua scuola di matematica. Gottinga era uno dei grandi centri europei di eccellenza per lo studio della fisica e della matematica allorché Heisenberg scoprì il principio di indeterminazione che da lui prese il nome.

Per misurare un fenomeno occorre osservarlo, ma proprio l'osservazione costituisce un disturbo per la misura in corso. Quand'anche disponessimo dello strumento di misura più avanzato, sarebbe impossibile misurare simultaneamente e con precisione assoluta sia la posizione sia la quantità di moto di un elettrone. Ogni tentativo di misurare simultaneamente sia la posizione sia la quantità di moto produrrà un errore nella determinazione di entrambe le quantità: indicando con Δx l'indeterminazione della posizione x e con Δp l'indeterminazione della quantità di moto p di un corpo, il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

dove ħ è la cosiddetta costante di Planck ridotta: $\hbar = h / 2\pi$ (h è la costante di Planck, sulla quale torneremo in seguito). La conclusione è che non siamo in grado di rilevare simultaneamente – e accuratamente – la velocità istantanea e la posizione di una particella, ma possiamo soltanto giudicare che essa è in moto e che il suo moto è costituito da una sequenza di – per così dire – guizzi di moto, senza continuità tra un guizzo e l'altro, e senza che vi sia possibilità di osservare che cosa avviene tra questi intervalli di moto non contiguo. Tutto ciò che possiamo sapere è che quella particella ha una probabilità di trovarsi in qualche regione dello spazio e che la sua energia e la sua quantità di moto hanno anch'esse una probabilità di trovarsi all'interno di una fascia di certi valori misurabili.

Le nostre osservazioni e indagini presenteranno sempre una certa indeterminazione, e questo vale sia su scala microscopica, sia su scala macroscopica, dove peraltro il principio di indeterminazione ha conseguenze irrilevanti. Tuttavia, su scala microscopica, la meccanica quantistica caratterizza tale indeterminatezza associando a ciascuna particella una cosiddetta «funzione d'onda» il cui modulo elevato al quadrato rappresenta la probabilità che la particella si trovi in una particolare posizione, con un'energia e una quantità di moto comprese entro un certo intervallo. La funzione d'onda costituisce una rappresentazione della particella e garantisce un accordo approssimato tra i dati sperimentali e la teoria. Il moto di una particella è descritto da un'onda che ci dà la probabilità che essa si trovi da qualche parte, in una particolare posizione nello spazio e nel tempo.[3]

Dobbiamo a questo punto precisare che l'onda non è un'onda reale lungo la quale la particella si muove. È una funzione continua che ci consente di prevedere la probabilità della posizione della particella in un qualsiasi istante futuro, se si conosce qualcosa riguardo alla posizione assunta precedentemente. Tuttavia, si tratta pur sempre di probabilità, e non di certezze. L'indeterminazione in questione si manifesta a livello atomico, ma è così piccola che, per quanto le incertezze possano accumularsi nel corso di una sperimentazione di laboratorio, si trova sempre entro i limiti dell'errore attribuibile all'imprecisione della strumentazione.

Come mise in luce Louis de Broglie, che nel XX secolo fu uno dei fondatori della meccanica quantistica, «l'essenza dell'indeterminazione è completamente mascherata dagli errori introdotti nel corso dell'esperimento, talché tutto avviene come se l'indeterminazione proprio non ci fosse. In altre parole, ciascun corpuscolo in ciascuna delle sue manifestazioni deve sempre, per così dire, scegliere tra parecchie possibilità: ma i margini della sua scelta si suppone che siano così stretti che in generale, come pure in particolare, nell'ambito sperimentale, tutto avviene come se il corpuscolo, invece di disporre di una libera scelta, fosse assoggettato a un rigido determinismo».

La storia della meccanica quantistica può essere datata dal momento in cui il fisico tedesco Max Karl Ernst Ludwig Planck cominciò a interrogarsi sulla relazione fra particelle subatomiche e certi fenomeni. Per esempio, un ferro portato a temperature via via superiori comincia dapprima a emettere luce infrarossa, nella parte invisibile dello spettro luminoso. Quindi, con l'aumentare della temperatura, si ha emissione di luce rossa, poi delle componenti di luce di tutte le frequenze dello spettro, fino alla frequenza del blu. L'energia consegnata al ferro in forma di calore si dissipa in forma di irraggiamento elettromagnetico. Si sapeva ormai da un secolo che la quantità di energia rilasciata è in relazione con la lunghezza d'onda della radiazione.[4]

Un altro effetto quantistico è la luminescenza – di solito, di colore blu – osservabile nell'acqua di raffreddamento di un reattore (effetto \erenkov): ciò avviene quando una particella subatomica attraversa il liquido a una velocità superiore a quella caratteristica di quel mezzo (tuttavia la velocità di propagazione è ancora inferiore a quella della luce nel vuoto, come stabilito nella teoria della relatività).

Se potessimo ingrandire una qualunque sostanza solida un triliardo di volte, potremmo osservare un reticolo di molecole, o di atomi, ciascuno dei quali esercita una forza sugli atomi vicini (o sulle molecole vicine), tutti essendo attratti da tutti. Possiamo pensare che ciascun atomo, o molecola, si trovi in stato di equilibrio, e che consegnando a quella sostanza una certa quantità di energia (per esempio in forma di calore), gli atomi (o le molecole) vibrano intorno alla loro posizione di equilibrio in proporzione alla temperatura. Infatti, la temperatura della sostanza è di fatto una misura dell'energia cinetica media delle molecole in vibrazione.

Nei primi mesi del 1900, subito dopo la scoperta dell'elettrone, Max Planck si domandava perché il colore della luce irradiata da una sostanza sottoposta a riscaldamento virasse con continuità via via che si aumenta la temperatura, dal rosso al blu. In particolare, Planck studiò l'emissione di un «corpo nero», che possiamo immaginare come un oggetto cavo in grado di assorbire tutte le lunghezze d'onda. Riscaldando un corpo nero si ottiene che esso emetta a sua volta radiazioni luminose il cui colore differisce in relazione alla temperatura: aumentando la temperatura del corpo nero, la sua emissione si sposta progressivamente dal rosso al blu.

Possiamo considerare le pareti di un corpo nero alla stregua di un oscillatore le cui radiazioni sono prodotte dalla vibrazione delle cariche elettriche degli atomi costituenti le pareti. Bene: secondo la teoria classica dell'elettromagnetismo, un oscillatore elettromagnetico dovrebbe essere in grado di produrre una distribuzione continua di valori energetici. Invece, mettendo a confronto la teoria classica dell'elettromagnetismo con i risultati della sperimentazione eseguita riscaldando un corpo nero a varie temperature, Planck trovò che gli oscillatori atomici del corpo nero non emettevano un'energia variabile con continuità: al contrario, i livelli di energia erano discretizzati. La sua idea fu allora quella di ripartire i livelli energetici della radiazione del corpo nero in un gran numero di contributi discreti: l'emissione del corpo nero avviene in forma di pacchetti di energia proporzionale alla frequenza della radiazione elettromagnetica (trattandosi di radiazione luminosa, la frequenza individua un preciso colore dello spettro della luce visibile). L'energia E scambiata dalle pareti del corpo nero è data dunque dalla formula:

$$E = nhf$$

dove n è un numero intero positivo, detto numero quantico, f è la frequenza dell'oscillatore (cioè del corpo nero a una certa temperatura) e h è la costante di Planck:

$$6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Data una frequenza f, i «pacchetti» di energia sono tutti uguali, misurano cioè tutti la stessa quantità: hf, o «quanto di energia». Einstein fece propria questa ipotesi di Planck sulla quantizzazione dell'energia scambiata tra atomi e radiazione elettromagnetica e affermò che la radiazione elettromagnetica è composta da singoli quanti di energia, che in seguito saranno chiamati fotoni.

La costante di Planck h è estremamente piccola,[5] così piccola che non è difficile per il fotone ingannarci, facendoci pensare che la luce è continua quando di fatto è discontinua, né più e né meno dell'acqua, che è costituita da una miriade di molecole. Dunque non soltanto è discontinua la materia: è discontinua anche la luce, che è poi il mezzo con il quale noi vediamo la materia. Ed è così che noi vediamo una freccia che silenziosamente spicca il volo dall'arco verso il bersaglio: immaginiamo che la sua traiettoria sia continua e arriviamo a pensare che la freccia possa spostarsi senza soluzione di continuità nel tempo, via via che procede nella sua traiettoria. Ma per quanto accuratamente abbiamo messo a fuoco il più preciso dei nostri strumenti d'indagine, non potremo mai vedere quella discontinuità infinitesimale: siamo costretti a fare affidamento alle impressioni ricevute per mezzo di questi ingannevoli quanti di luce, emessi discontinuamente, ma che ci lasciano credere che lo spazio, e il volo della freccia attraverso lo spazio, siano entrambi continui.

Al tempo in cui scoprì che l'energia distribuita fra le cariche elettriche oscillanti nelle pareti del corpo nero non è continua ma discreta, Planck aveva quarantadue anni ed era professore di fisica teorica all'Università di Berlino: in particolare, studiava a quel tempo la termodinamica e la distribuzione dell'energia in funzione della lunghezza d'onda. Aveva un viso curioso, stempiato e con le orecchie basse, ma era ancora di aspetto piacevole. Anche se privatamente non gli dispiaceva di parlare di quella che sarà la sua costante (ma lui la chiamava «quanto elementare d'azione»), nel corso del convegno promosso dall'Accademia delle scienze di Berlino, il 14 dicembre 1900, era molto indeciso riguardo all'opportunità di spingersi a manifestare le sue idee, in contrasto con la fisica classica. Nel discorso pronunziato in occasione dell'accettazione del premio Nobel disse: «Il quanto d'azione dovrà giocare un ruolo fondamentale nei futuri sviluppi della fisica. Fece la sua apparizione come qualcosa di completamente nuovo, non se n'era mai avuta notizia, e già postulava una revisione dalle fondamenta di tutta l'impalcatura del nostro pensiero fisico, così come si era costituito dal tempo in cui Leibniz e Newton avevano stabilito il calcolo infinitesimale, con il presupposto della continuità di tutti i nessi di causalità. È stato il lavoro sperimentale che ha deciso a favore di questa nuova concezione alternativa».

Dal tempo di Zenone a oggi nel corso della storia della fisica si è assistito a una progressiva riduzione della materia costituente l'Universo in particelle discrete, cioè numerabili; eppure ci è difficile immaginare la progressione del movimento, o quella del tempo, o anche lo stesso spazio e la propagazione della luce come qualcosa di discontinuo. Come scrisse Louis de Broglie: «I fisici sono pervenuti gradualmente alla convinzione che il carattere continuo della materia solida e di quella costituente i fluidi è illusorio, e che la materia in realtà consiste di atomi in movimento. Dobbiamo alla grossolanità dei nostri sensi, e solo a quella, se non riusciamo a percepire la struttura della materia che in ultima analisi è corpuscolare. Invece i sensi ci fanno credere che tale struttura è continua».[6] Quando era ancora laureando alla Sorbona nel 1924, de Broglie si era imbattuto in qualcosa di strano. I fisici sapevano che le onde elettromagnetiche possono essere descritte come particelle. Nel 1887 Heinrich Hertz, dopo aver individuato le onde elettromagnetiche invisibili previste dalla teoria di Maxwell – onde che si riflettono, rifrangono, diffrangono e che viaggiano alla velocità della luce – aveva fatto una scoperta molto importante. Nei suoi esperimenti le onde elettromagnetiche erano prodotte da uno spinterometro e rivelate da una spira aperta terminante con due sferette affacciate. Quando la spira è investita dalle onde elettromagnetiche, tra le due sferette scocca una scintilla; Hertz scoprì che, proiettando un fascio di luce ultravioletta sulle due sferette, la scintilla tra le sferette è molto più intensa. Questo fenomeno prenderà il nome di effetto fotoelettrico.

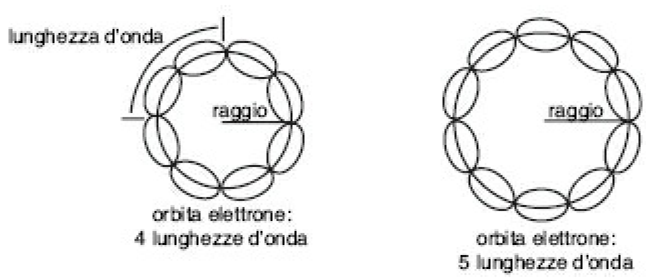
Più tardi, dopo la scoperta dell'elettrone nel 1897, il fisico tedesco Philipp von Lenard fece degli esperimenti con un tubo a vuoto nel quale una piastrina metallica, investita da un fascio di luce, provocava un flusso di elettroni (una corrente elettrica) in un circuito elettrico. In particolare, von Lenard stabilì che l'energia degli elettroni emessi dalla piastrina è determinata dalla frequenza del fascio incidente e che esiste una soglia di frequenza al di sotto della quale non si ha alcuna emissione di elettroni. In altre parole, se la frequenza della luce proiettata sulla piastrina si trova al di sotto di tale soglia, non si avrà comunque corrente elettrica, indipendentemente dall'intensità di luce con cui la piastrina è irraggiata. Fu così dimostrato che l'energia di un qualsiasi elettrone emesso dalla piastrina per effetto fotoelettrico dipende soltanto dalla frequenza della luce, cioè dal suo colore.

Einstein aveva in serbo una spiegazione per l'effetto fotoelettrico. In una pubblicazione datata «Berna, 17 marzo 1905» suggerì che l'energia della luce è distribuita nello spazio in modo discontinuo e che quando una «particella di luce» di frequenza sufficientemente elevata penetra un metallo, colpisce un elettrone al quale trasferisce la sua energia: se l'energia ricevuta dall'elettrone supera il cosiddetto «lavoro di estrazione», l'elettrone è sbalzato fuori dal metallo.[7] I fotoni di frequenza maggiore hanno un'energia maggiore, mentre a una maggiore intensità di irraggiamento corrisponde l'emissione di un numero maggiore di fotoni. Se la frequenza (cioè l'energia) della luce (cioè dei fotoni) si trova sotto la soglia del lavoro di estrazione, nessun elettrone sarà liberato dal metallo e poiché tutti i fotoni di una certa frequenza hanno la medesima energia, intensificando l'irraggiamento del metallo (cioè incrementando il numero dei fotoni incidenti) non si noterà alcuna differenza.[8] Scrisse Einstein: «Nella propagazione di un raggio di luce emesso da una sorgente puntiforme, l'energia non si distribuisce con continuità in volumi di spazio sempre maggiori, ma consiste di un numero finito di quanti di energia localizzati nello spazio che si spostano senza suddividersi, e che possono essere assorbiti o generati soltanto come unità a sé stanti».[9] Secondo John Gribbin, astrofisico a Cambridge, «questa frase segna il vero inizio della rivoluzione quantistica». Forse ha ragione; in ogni caso, Einstein ricevette tardivamente il premio Nobel nel 1922, proprio per quest'idea, concepita nel 1905.

Nel 1924 Louis de Broglie cominciò a pensare che gli elettroni potessero essere descritti come onde. Mettendo insieme due semplici equazioni che erano già conosciute, ricavò una relazione molto semplice tra la quantità di moto p delle particelle di luce,[10] la lunghezza d'onda λ della radiazione elettromagnetica,[11] e la costante di Planck h. Stabilì che:

$$p\lambda = h$$

Ma l’aspetto più importante della questione è che tale relazione si applica non soltanto ai fotoni, ma anche agli elettroni. Cioè, partendo da una riflessione sulla dualità onda-particella, de Broglie perviene alla conclusione che le particelle subatomiche sono di natura ondulatoria in certi fenomeni, in altri di natura corpuscolare. Si aprì così la strada a un nuovo modo di pensare non soltanto l’elettrone ma lo stesso atomo, perché se gli elettroni che orbitano intorno al nucleo dell’atomo hanno un comportamento ondulatorio, allora i livelli energetici degli elettroni devono essere interpretabili in termini di onde armoniche, di onde – cioè – di frequenze multiple fra loro. Infatti, mentre nel modello corpuscolare dell’elettrone si ha un elettrone che orbita lungo una traiettoria circolare, in quello ondulatorio l’elettrone è un’onda «stazionaria» che deve chiudersi su se stessa, lungo quella stessa traiettoria circolare. Il numero di lunghezze d’onda distribuite lungo l’orbita dell’elettrone deve essere un numero intero. Questo significa che il raggio delle orbite degli elettroni può avere soltanto un certo insieme di valori «permessi».



De Broglie dava per scontato che la natura ama la simmetria e, partendo da una riflessione sull’effetto fotoelettrico individuato per primo da Hertz, suggerì che, a livello atomico e subatomico, l’energia e la materia si comportassero entrambe come se fossero sia particelle, sia onde. Tuttavia, riguardo al modo con cui l’energia è immagazzinata, c’è una differenza significativa tra una particella e un’onda. Infatti, l’energia di una particella è concentrata nella sua massa, invece l’energia di un’onda è distribuita lungo tutta l’onda. L’unico modo di uscire dalle strette dell’antica rivalità tra la concezione corpuscolare della luce (Newton) e quella ondulatoria (Young) consiste nell’accettare che la luce partecipi insieme della natura corpuscolare e di quella ondulatoria, senza dover essere considerata strettamente l’una o l’altra cosa. A una particella corrisponde un’onda, e a ogni onda corrisponde una particella in movimento. Ecco che la luce, che era sempre stata considerata un fenomeno continuo, viene adesso pensata come composta da quantità discrete e uguali, viene pensata cioè in termini di quanti di energia hf proporzionali alla frequenza della radiazione elettromagnetica.

14. Se nel movimento non c'è un evento successore, che cosa viene dopo?

Immaginiamo che Superman sia in grado di coprire con lo sguardo distanze siderali e che la sua vista gli consenta di ingrandire minuscoli granelli di materia, quasi infinitesimi. Grazie ai superpoteri, elude il principio di indeterminazione e mette a fuoco i segreti più riposti dello spazio, senza distorsione di sorta. Da una parte, proiettando lo sguardo nelle regioni remote della nostra galassia, Superman è in grado di percepire la curvatura dello spazio, laddove il campo gravitazionale assume valori rilevanti. Dall'altra, analizzando con risoluzione sempre maggiore un granellino di segatura, arriva a percepire lo spazio nella scala dei fenomeni quantici: il microcosmo gli appare come una sorta di mare in ebollizione, dominato dagli imprevisti della casualità. Quest'immagine è in netto contrasto con le pareti lisce delle «buche» di un Universo paragonabile – come abbiamo visto in un capitolo precedente – a un trampolino elastico.

Mentre la teoria generale della relatività si presenta compatibile con la meccanica newtoniana, tra la teoria della relatività e la meccanica quantistica c'è una brusca interruzione. Quando Superman utilizza i suoi poteri per ingrandire le cose, la teoria della relatività deve ritirarsi in buon ordine. Si sente l'esigenza di un modello matematico della natura più generale, tale da includere sia la teoria generale della relatività, sia la meccanica quantistica.

Nella geometria della relatività generale, la superficie dell'Universo è accidentata, con infossamenti presenti dappertutto dove sia presente una massa: tuttavia le pareti delle buche sono lisce. Invece nella tessitura microscopica dello spazio non vediamo uniformità. Al contrario, si hanno fluttuazioni del campo gravitazionale caratterizzate da incertezza quantistica, così brusche che, facendo la media, si elidono a vicenda, tanto che il campo gravitazionale risultante praticamente si annulla. Il principio di indeterminazione di Heisenberg ci dice che quanto più da vicino osserviamo gli eventi su scala microscopica, tanto più brusche sono le fluttuazioni del campo gravitazionale. Mentre nella geometria postulata dalla teoria generale della relatività lo spazio è incurvato uniformemente dalla gravità, si ha su scala microscopica una tessitura spaziale estremamente disordinata, spezzata da guizzi imprevedibili: sono queste – come negarlo? – due geometrie in contraddizione.

Sulla scia della relatività generale e della meccanica quantistica, il modello di un Universo il cui spazio è costituito da punti indivisibili non appare più praticabile. All'inizio degli anni settanta del secolo scorso è stato messo a punto, nell'ambito della fisica delle particelle, il cosiddetto modello standard, che descrive elegantemente la forza elettromagnetica, l'interazione nucleare forte e l'interazione nucleare debole e che assume che tutta la materia sia formata da particelle fondamentali. Questo modello, in accordo sia con la meccanica quantistica, sia con la teoria speciale della relatività (nella quale non si considera la forza gravitazionale), è stato verificato sperimentalmente. Tuttavia il modello standard non descrive l'interazione gravitazionale, che è la forza conosciuta da più tempo, ma che è anche la più debole delle forze di natura.[1]

A metà degli anni ottanta, i fisici si volsero con entusiasmo incondizionato a una nuova teoria quantistica in accordo con la gravitazione. Brian Greene ricorda che, quando era ricercatore a Oxford nel 1984, gli studenti del primo anno del corso di dottorato erano pervasi dal «senso elettrizzante di vivere un momento epocale nella storia della fisica. [...] Tra noi c'era un gruppo di persone che lavorava senza tregua fino a notte fonda nel tentativo di padroneggiare quei campi della fisica teorica e della matematica astratta che ritenevano necessari per comprendere la teoria delle stringhe».[2]

Dunque, la teoria delle stringhe. La prima delle sue numerose versioni si affacciò alla ribalta nel 1968, quando il fisico italiano Gabriele Veneziano si rese conto che una formula studiata nel XVIII secolo dal matematico Leonhard Euler (il suo nome latinizzato è Eulero) si applicava perfettamente ai dati che descrivono il comportamento delle particelle soggette all'interazione nucleare forte. Se una formula – non importa quale – si adatta perfettamente a un insieme di dati sperimentali deve pur esserci una ragione. La spiegazione venne presto da Chicago, Stanford e Copenaghen, allorché Yoichiro Nambu, nippo-americano, l'americano Leonard Susskind e il danese Holger Bech Nielsen scoprirono che la funzione di Eulero descrive le particelle elementari come corde vibranti esilissime (la corda di uno strumento musicale si dice in inglese string: di qui l'espressione «teoria delle stringhe», poco corretta ma ormai invalsa nell'uso).

Abbiamo visto che la teoria generale della relatività descrive la forza fondamentale di gravitazione, il cui campo di applicazione riguarda le strutture di larga scala, come le stelle e le galassie, mentre la meccanica quantistica descrive le tre rimanenti forze fondamentali della natura: la forza elettromagnetica, l'interazione nucleare forte e l'interazione nucleare debole, che agiscono su scala microscopica. C'è inoltre il problema di mettere in relazione la tessitura liscia dello spazio-tempo postulato dalla teoria generale della relatività con il comportamento bruscamente imprevedibile dell'Universo, quando sia osservato da vicino e, per così dire, ingrandito su scala locale. La posta in gioco consiste nel non curarsi dell'uniformità della tessitura dello spazio, ma piuttosto nel costruire un'unica nuova teoria che conservi tutti gli aspetti sostanziali sia della teoria della relatività generale, sia della teoria dei quanti, così da fornire una spiegazione compatibile della natura di tutte le quattro forze fondamentali. La nuova teoria dovrebbe comprendere una descrizione della tessitura spaziale, tale che essa sia uniforme su scala macroscopica e bruscamente disomogenea su scala ultramicroscopica, raccordando così la relatività generale con la fisica dei quanti. I teorici delle stringhe avanzano ottimisticamente la possibilità che un giorno si possa pervenire a una tale teoria.

Ora, queste stringhe sono davvero minuscole, così piccole che pure ingrandite 10^{20} volte avrebbero le dimensioni del nucleo di un atomo di idrogeno, talmente piccole da superare ogni immaginazione. Sostituendo il modello standard della fisica delle particelle con una teoria che preveda l'esistenza di stringhe chiuse vibranti, emerge una teoria promettente che incorpora la teoria generale della relatività e la meccanica quantistica, dal momento che fornisce una spiegazione valida per tutte le quattro forze fondamentali della fisica delle particelle.

Ma che cosa sono queste stringhe vibranti? Per quanto minuscole, devono pur essere fatte di qualcosa. Certo non possono essere fatte di atomi, dal momento che rappresentano una caratterizzazione della materia atomica più profonda. Anche se non possono essere viste, nemmeno con gli strumenti più potenti, possiamo immaginare che con un ingrandimento ideale fortissimo appaiano quasi come punti senza spessore. Ma non sono prive di spessore: se potessimo ingrandirle fino alla dimensione di un pisello, e potessimo rallentare il tempo così che lo svolgimento di un nanosecondo impieghi un anno a compiersi, vedremmo le stringhe come anelli rapidamente vibranti, prodotti da qualcosa che ha l'aspetto di una corda vibrante (o «stringa», appunto). Il vantaggio di considerare una stringa sotto l'aspetto di un punto è che così si comprende in un concetto unico l'idea di una particella elementare e delle forze fondamentali.

Si consideri per esempio – nell'ambito del modello standard – il cosiddetto spin di un elettrone (cioè, il momento angolare intrinseco). La meccanica quantistica presuppone che l'elettrone in qualche modo ruoti su se stesso e che insieme compia un moto di rivoluzione lungo una certa orbita circolare intorno al nucleo dell'atomo, anche se la posizione dell'elettrone lungo quell'orbita può essere stabilita soltanto probabilisticamente. Non soltanto ruota su se stesso a una velocità prefissata, ma quella velocità è anche la stessa per tutti gli elettroni in un qualsiasi atomo: esiste, cioè, uno spin caratteristico dell'elettrone. Altre particelle subatomiche, come i quark, sono caratterizzate da uno specifico momento angolare intrinseco. Ebbene, passando dal modello standard alla teoria delle stringhe, vediamo che lo spin, che dà luogo a certe proprietà magnetiche, è replicato nelle stringhe caratterizzandone il modo di vibrazione. Dunque la forza elettromagnetica è associabile a particolari configurazioni di vibrazione delle stringhe.

La teoria speciale della relatività ci dice che l'energia e la massa sono intercambiabili. E dal momento che la gravità è determinata dalla massa, troviamo che l'attività delle stringhe fornisce alla massa la forza gravitazionale.

Anche le altre due forze fondamentali della natura (l'interazione nucleare debole e l'interazione nucleare forte) possono essere associate a particolari modalità di vibrazione delle stringhe.

Possiamo paragonare le stringhe alle corde di una chitarra che vibrano secondo numerose modalità, caratterizzate fondamentalmente dal numero (intero) di onde che si formano tra il capotasto e il ponte. La corda vibra trasversalmente fra questi due estremi, formando un treno di onde stazionarie di frequenza multipla l'una dell'altra: esse vengono dette «prima armonica», o modo fondamentale, seconda armonica (con emissione di un suono di frequenza doppia rispetto al modo fondamentale), terza armonica (con emissione di un suono di frequenza tripla) ecc. Non esiste dunque una sola onda stazionaria, ma tante: negli strumenti musicali la presenza più o meno accentuata delle armoniche, o anche la loro assenza, conferisce il timbro che ci fa distinguere uno strumento musicale dall'altro, a parità di frequenza, cioè a parità della nota musicale emessa. A una frequenza superiore corrisponde un'energia cinetica maggiore. Tornando alla teoria delle stringhe, possiamo affermare che a ciascuna particella elementare del modello standard corrisponde una certa caratterizzazione delle modalità di vibrazione della stringa.

È possibile che queste stringhe siano davvero fondamentali, nel senso che non hanno parti costituenti, e che siano esse i veri elementi indivisibili dei quali consta la materia. Forse le stringhe sono ciò che Brian Greene ha chiamato «l'ultima delle matrioske», nel qual caso la questione riguardo a ciò di cui esse siano costituite perde ogni significato. In questo caso le stringhe non potrebbero essere fatte di nient'altro che di se stesse, perché altrimenti non corrisponderebbero all'ultima matrioska. Forse le stringhe costituiscono l'ultima parola nell'Odissea del paradosso del moto. O forse non sono l'ultima parola.

Nel 1995 erano in lizza cinque versioni diverse della teoria delle stringhe che sembravano connesse fra loro e che avevano l'aspetto di essere casi particolari di un'unica «teoria del tutto», una teoria che pretende di spiegare tutti i fenomeni dovuti a tutte le forze agenti in natura: grazie a questa teoria, si avrebbe un quadro della «cosa» fondamentale che costituisce l'Universo.

Una delle possibili versioni della teoria delle stringhe prevede che le dimensioni dell'Universo non siano quattro, ma ventisei. Secondo un'altra versione, il numero delle dimensioni si riduce a dieci. Ma, anche in quest'ultimo caso, noi non osserviamo che quattro dimensioni: dove sono finite le altre sei? Un modo di pensare le dimensioni extra è considerarle come fibre localizzate nello spazio quadridimensionale: a ciascun punto dello spazio quadridimensionale corrisponde una fibra e ciascuna fibra è un'entità matematica caratterizzata da sei dimensioni. Queste fibre sono così minuscole e arrotolate che ce le immaginiamo come linee unidimensionali emergenti dai punti del nostro spazio quadridimensionale. In realtà le linee rappresentano sei nuove dimensioni che portano in sé un'informazione sufficiente per descrivere come lo spazio reagisce alle forze fondamentali e come debbano evolversi gli eventi che transitano nello spazio. Nel modello dell'Universo basato sulla teoria delle stringhe, lo spazio non è più costituito da punti, ciascuno dei quali è descritto matematicamente da un insieme di numeri che forniscono il suo «indirizzo», come previsto dal modello standard; secondo la teoria delle stringhe, lo spazio è costituito, invece, da fibre la cui rappresentazione matematica è matriciale.

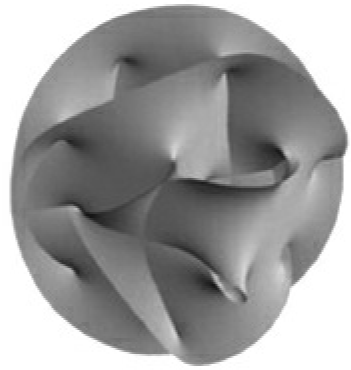
Ma perché le dimensioni extra? Proviamo a pensare in due dimensioni il fenomeno di vibrazione di una corda di chitarra. La pressione del dito su uno dei tasti posti sul manico della chitarra determina una variazione della frequenza fondamentale; ma la composizione delle armoniche – cioè, come abbiamo visto, delle frequenze multiple della fondamentale – dipende dalla cosiddetta «tavola armonica» della chitarra, che si sviluppa in due dimensioni, e non più in una dimensione, come la corda vibrante. Così quando la corda della chitarra è pizzicata, la corda vibrante unidimensionale trasmette la sua vibrazione ondulatoria alla tavola armonica bidimensionale, che risuona per simpatia. Sia la corda vibrante, sia la tavola armonica sono immerse nel nostro spazio tridimensionale. Alla stessa stregua gli eventi quadridimensionali del nostro spazio-tempo attivano per risonanza – su scala ultramicroscopica – le minuscole fibre arrotolate esadimensionali. Le loro modalità di vibrazione si manifestano come masse e forze. Non solo non siamo in grado di osservare queste sei dimensioni compatte a occhio nudo, ma anche in laboratorio tali dimensioni sono così piccole da non poter essere rilevate: tuttavia ne sentiamo gli effetti in termini di massa e forza delle particelle elementari, oltre che come forze gravitazionali ed elettromagnetiche.

Nel 1984 i tre fisici americani Gary Horowitz, Andrew Strominger e Edward Witten presero in considerazione un oggetto matematico ipotizzato nel 1957 dal matematico americano Eugenio Calabi. Questo «oggetto» è uno spazio astratto esadimensionale caratterizzato proprio da quella metrica (cioè con lo stesso criterio di misura dello spazio) e proprio da quelle simmetrie che sono necessarie per modellizzare le particelle fondamentali.

Lo spazio di Calabi nasceva da considerazioni di geometria differenziale e algebrica e da una particolare classificazione delle superfici algebriche basata sulle radici di equazioni polinomiali.[3] Calabi ipotizzò una classe particolare di spazi esadimensionali caratterizzati da notevole simmetria e dalla metrica cosiddetta Ricci-piatta (un particolare criterio di misura dello spazio dall'interno).[4] Nel 1977 il matematico sino-americano Shing-Tung Yau fu in grado di dare una dimostrazione della congettura di Calabi. Fu così definita una particolare classe di superfici, cosiddette «varietà di Calabi-Yau» (o «spazio di Calabi-Yau»), che possedeva giusto quelle proprietà – dimensione, metrica, topologia e simmetrie – rispondenti alle esigenze di una teoria che si prefigga di modellizzare precisamente il comportamento delle particelle elementari, considerate come vibrazioni di stringhe.

L'idea che abbiamo dello spazio è basata sull'esperienza che ne abbiamo sempre avuta, ma non abbiamo alcuna esperienza dello spazio nella scala delle stringhe, il cui ordine di grandezza è 10^{-35} m. Un modo di visualizzare qualcosa che abbia esistenza nelle dimensioni extra è proiettarne l'immagine in una dimensione inferiore: qualcosa di analogo a quel che avviene quando una mela, tridimensionale, viene proiettata sulla superficie bidimensionale di una pellicola fotografica. Un altro modo di visualizzare la mela utilizzando un numero inferiore di dimensioni potrebbe essere quello di farne numerose sezioni, in stretta successione: otteniamo così di abbassarne la dimensionalità. La sequenza di fettine di una mela ci darebbe l'impressione che, qualunque cosa essa sia, si tratta pur sempre di qualcosa che è piccolo e circolare nella prima fetta e che nelle fette successive continua a essere circolare ma di raggio progressivamente maggiore, finché, dopo una certa fetta, si continuerebbero ad avere fette circolari, ma di raggio sempre minore. A questo punto, ragionando, arriviamo a capire che la mela nelle tre dimensioni debba essere sferica. La sezione degli oggetti si ottiene matematicamente mantenendo costante il valore di una variabile.

Arriviamo a concepire la varietà di Calabi-Yau nello stesso modo. L'illustrazione qui sotto è una proiezione bidimensionale della sezione quadridimensionale di una varietà di Calabi-Yau esadimensionale. Questo è l'unico modo in cui noi possiamo visualizzare tale «varietà» sulla pagina di un libro.[5]



Andrew J. Hanson, Indiana University.

Ritorniamo a questo punto a un concetto incontrato precedentemente: quello di linea di Universo, detto anche linea oraria, che rappresenta il diagramma di un evento nel suo sviluppo spazio-temporale. Se tracciamo nello spazio-tempo la linea di Universo di una stringa unidimensionale, vediamo che tale linea descrive con il suo movimento una superficie bidimensionale, chiamata foglio di Universo. Per esempio, dobbiamo immaginare che le modalità di vibrazione di una stringa inducano un insieme di onde su questo foglio di Universo: onde elettromagnetiche, magari, o anche onde gravitazionali. Essendo chiusa, la stringa descriverà un foglio di Universo anch'esso chiuso, una specie di tubo sinuoso. Ma la vera domanda è a che cosa possa somigliare lo spazio osservato da vicino, molto da vicino. Si pensava un tempo che lo spazio fosse rappresentato da una continuità di punti e che ogni tanto vi fosse una molecola con i suoi atomi, un atomo con il suo nucleo, gli elettroni, i protoni ecc. Ma che dire riguardo a tutto lo spazio vuoto tra le molecole di materia, tra gli atomi, tra un nucleo e i suoi elettroni, o tra i quark? Che cosa significa spazio vuoto? E che cosa significa la parola «tra» riferito all'insieme di punti dello spazio? Secondo la teoria delle stringhe, dobbiamo pensare che le prime quattro dimensioni sono spazio-tempo, ma che ogni punto dello spazio-tempo è in realtà una qualche varietà di Calabi-Yau.

Le stringhe vibranti si muovono attraverso lo spazio (o «varietà») di Calabi-Yau, su e giù lungo le sei dimensioni. In questo Universo il moto è molto più complesso di quanto si fosse mai pensato prima. Zenone non avrebbe mai immaginato che la sua freccia dovesse spostarsi non soltanto nella continuità dello spazio, cioè nello spazio-tempo, ma anche su e giù lungo le sei dimensioni di ogni spazio di Calabi-Yau che si trovi in ciascun punto dello spazio-tempo attraversato dalla freccia. Non avrebbe mai pensato che Achille dovesse raggiungere la tartaruga compiendo un percorso così articolato. Naturalmente, le dimensioni extra sono così piccole che il loro attraversamento non richiede nessun tempo, né da parte della freccia, né da parte di Achille.

Se la teoria delle stringhe costituisce davvero un modello dell'Universo (si ricordi che siamo ancora al livello di congettura), allora i paradossi di Zenone riguardo alla continuità sono molto più profondi di quanto noi, ed egli stesso, potessimo aspettarci. Ogni cosa che facciamo, ogni movimento che compiamo è davvero un'illusione: l'illusione di spostarci soltanto lungo tre dimensioni.

Zenone e Parmenide avevano suggerito molto tempo fa che la nostra concezione della realtà è fantasia, illusione. Einstein impresse una svolta a questa idea, affermando che la verità e la realtà trovano una giustificazione appropriata se l'idea di realtà che riusciamo a concepire può essere posta in relazione con l'esperienza. «Siamo liberi» così scrisse «di scegliere gli elementi da applicare ai fini della modellizzazione della realtà fisica. Ciò che giustifica la nostra scelta è unicamente l'esito favorevole della scelta stessa». Se il nostro modello funziona, abbiamo una buona giustificazione per utilizzarlo nella comprensione della realtà. Ma non dovremmo mai confondere il modello con la realtà fisica.

Zenone riconoscerebbe senza remore che la matematica applicata ai suoi paradossi è ragionevole e che essa può mettere in evidenza con precisione assoluta dove e quando si compia ciascuno dei fenomeni da lui esaminati. Ma, ancora una volta, quanto più la matematica si rivela in grado di dimostrare l'esito degli eventi, e quanto più profondamente la fisica riesce a descrivere il mondo, tanto più il moto di Zenone appare paradossale.

15. Flusso a senso unico

Le cause e la stessa natura della coscienza umana sono sempre state oggetto di dibattito, fin dal tempo di Platone. Sono tornate imperiosamente alla ribalta al tempo in cui Cartesio ne mise in questione la stessa esistenza. Quindi, alla fine del XIX secolo, lo psicologo William James applicò il concetto di continuità del tempo all'indagine su ciò che chiamò flusso di coscienza, arrivando alla conclusione che è impossibile fermare qualsiasi pensiero e analizzarne i contenuti prima che esso si sia concluso. Se, con un pizzico di fortuna, il pensatore è «abbastanza agile da coglierlo, il pensiero cosciente cessa immediatamente di essere in quanto tale».[1] Sembra che il pensiero cosciente evapori, prima di poter essere esaminato, così come svanisce «nel cavo di una mano calda, appena catturato, un cristallo di neve». Ogni tentativo di fermare il flusso continuo del pensiero cosciente è vano, è come voler fermare «una trottola per coglierne il moto, o girare velocemente fino in fondo la chiavetta del gas, per vedere quale sia l'aspetto dell'oscurità». Sono operazioni che non portano a niente, come la richiesta che Zenone faceva ai paladini del moto, quella di indicare dove precisamente si trovasse la punta della freccia nel corso del suo tragitto dall'arco al bersaglio.

Noi «possiamo vivere attraversando un tempo reale esterno, un tempo conosciuto dallo psicologo che ci esamina, tuttavia non sentiamo il tempo, né possiamo dedurlo da un qualche segnale interno». Forse la coscienza, di per sé, è discontinua, forse «si interrompe incessantemente e ricomincia (dal punto di vista dello psicologo)?». Certamente la coscienza è interrotta dal sonno e dai sogni; eppure sembra essere, nonostante tutto, continua. È forse «un'illusione analoga a quella dello zootropio? O dobbiamo pensare che, in generale, sia continua, anche esternamente, come appare internamente?». William James non aveva risposte per queste domande e riteneva che non ve ne fossero.

È possibile che non siamo in grado di dire se il flusso del pensiero cosciente sia continuo, o no. Ma sappiamo che il fascio complesso di segnali raccolti senza posa da tutti i nostri sensi è ordinato, sincronizzato e registrato in modo da formare ciò che noi chiamiamo coscienza.

Si consideri il senso della vista. Lo zootropio, le cui immagini animate davano l'illusione del movimento agli spettatori seduti tutt'intorno nei salotti del XIX secolo, non è niente di più che un tamburo cilindrico ruotante intorno a un asse, sulla cui parete laterale è praticata una serie di fenditure e al cui interno si trova una dozzina di figure di una stessa persona. Ciascuna figura è uguale a quella precedente, tranne che in un particolare, dove si ha una leggera differenza. Osservando la successione di figure attraverso le fenditure del cilindro ruotante, lo spettatore vede le immagini fuse l'una nell'altra: vede la figura di quella persona in movimento.

Dunque immagini ferme ma presentate in rapida successione sono interpretate come se la figura fosse veramente in movimento. Com'è che ciò può avvenire? Il famoso fisico e fisiologo tedesco Hermann von Helmholtz diede nel XIX secolo, nel suo Manuale di fisiologia ottica – un trattato che segnò una svolta nel progresso della medicina – la seguente spiegazione: l'occhio trattiene le immagini per un tempo abbastanza prolungato, finché il posto di un'immagine sia preso dall'immagine successiva.[2] Effettivamente, qualcosa del genere avviene nella retina: per esempio, se si osserva un circoletto nero su uno sfondo bianco per alcuni secondi e poi si distoglie lo sguardo, il circoletto nero persiste per alcuni secondi ancora. Il fenomeno è ancora più pronunziato quando continuiamo a vedere una chiazza di luce bianca in una stanza oscura per un certo tempo, anche abbastanza prolungato, dopo che la luce non c'è più. Il fatto è che la chiazza si trova impressa temporaneamente nella retina dell'occhio, che è fotosensibile. Ma oggi sappiamo che la coordinazione delle singole immagini effettivamente percepite mediante il senso della vista ha luogo non negli occhi, ma in quella parte della corteccia cerebrale che è deputata alla visione. Perciò rimane aperta la domanda: com'è che una rapida successione di immagini ferme viene ricostruita come un'immagine in movimento che vediamo scorrere nel tempo, senza scatti?

C'è una qualche necessità biologica perché noi si veda il movimento come continuo? Una rana è in grado di ghermire soltanto piccoli insetti, dal momento che vede unicamente i movimenti delle sue piccole prede, non essendo distratta da altri segnali visivi circostanti, che per lei non sono vitali. Gli uomini non hanno la necessità di catturare gli insetti con la lingua, ma hanno bisogno di recettori visivi più raffinati di quelli della rana, recettori che non si limitino ad avvertire i soli spostamenti. Ci fu un tempo in cui gli uomini erano in grado di procurarsi da vivere con la caccia e la pesca, guardandosi nello stesso tempo dalle insidie dei serpenti e dagli agguati di tigri dai denti a sciabola. Ma perché l'uomo avrebbe la necessità di percepire il movimento continuo? La percezione di un movimento staccato non sarebbe sufficiente a proteggerci dalle fiere e a consentirci di lavorare i campi e vivere come siamo sempre vissuti?

Forse il mondo reale nel quale viviamo è veramente discontinuo e ogni singolo movimento si compie più o meno come vediamo in quei film di primo Novecento, dove le immagini sono tremolanti e i movimenti si compiono a scatti. Ma se così stanno le cose, potremmo mai esserne consapevoli? O non avviene forse che stendiamo sulle nostre percezioni una rete di sensazioni personali che copre la realtà mostrandoci ciò che invece ci aspettiamo di vedere? Se veramente il cervello è ciò che fa sì che noi vediamo, allora poco importa ciò che vediamo, purché il cervello riceva informazioni sufficienti per interpretare la realtà. Helmholtz fece alcune esperienze con prismi di cristallo: provò con essi a capovolgere il suo campo visivo, dal basso in alto. Non ci volle molto perché il cervello imparasse a interpretare i dati visivi invertiti, ricollocando il mondo nella sua posizione corretta. Se di questo è capace il nostro meraviglioso cervello, è mai possibile che non sia in grado di correggere le immagini tremolanti, come in un film di inizio

Novecento, così da mostrarcele uniformi e continue? In fondo, il buon esito dell'addestramento è soltanto questione di tempo.

E che dire se invece fosse vero tutto il contrario? Se cioè la struttura del mondo reale fosse continua e l'organo della vista ci presentasse il mondo a scatti, come se gli oggetti fossero illuminati da una luce stroboscopica? Saremmo a disagio nel vedere una successione di immagini sconnesse? Sapremmo riconoscere la differenza o semplicemente ci adatteremmo, come abbiamo fatto con i cibi che da piccoli non ci piacevano?

La nostra percezione della freccia di Zenone che si muove senza soluzione di continuità potrebbe non aver niente a che fare con il vero movimento. La matematica alla quale facciamo ricorso per modellizzare il volo della freccia potrebbe modellizzare anche il modo in cui percepiamo quel movimento, perché no? Perciò il paradosso del movimento della freccia sta nel crocevia dove la realtà si incontra con la percezione che ne abbiamo. La stessa cosa potrebbe dirsi per il paradosso della dicotomia o per quello «dell'Achille», per cui Zenone afferma che il compimento di una qualsiasi cosa richiede comunque che si sia compiuto un numero infinito di eventi precedenti.

Il matematico e biologo D'Arcy Thompson, che ci ha entusiasmato con la sua idea, secondo la quale le forme biologiche e la loro crescita sono suscettibili di una descrizione per mezzo di relazioni matematiche, affermava: «L'armonia del mondo si manifesta nella forma e nel numero: sono questi il cuore, l'anima e la poesia della filosofia naturale, incorporati nel concetto di bellezza matematica». Il fisico inglese Sir James Jeans scrisse un giorno: «Per evidenza intrinseca della creazione, appare manifesto che il grande architetto dell'Universo è un matematico puro». Galileo d'altra parte affermava nel Saggiatore: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».

A queste citazioni, abbastanza conosciute e apprezzate per il vigore espressivo, si contrappone – quasi ne volesse smussare l'acume – la seguente, concisa ed efficace, dovuta al teorico dei numeri tedesco Leopold Kronecker: «Dio ha creato gli interi, il resto è opera dell'uomo».

Forse dobbiamo a questa deriva dalla creazione divina il fatto che la matematica vada allontanandosi sempre più dalla realtà fisica?

Affermò David Hilbert: «In fin dei conti, la verità è che da nessuna parte esiste, nella realtà delle cose, un continuo omogeneo divisibile indefinitamente, un continuo nel quale possa realizzarsi l'infinitamente piccolo. La divisibilità all'infinito di un continuo è un'operazione che può esistere nel pensiero, ma è soltanto un'idea, un'idea contraddetta dall'osservazione della natura, come pure dagli esperimenti fisici e chimici».

In queste righe Hilbert suggerisce che sia in corso una disputa amichevole tra il concetto di infinito – che è il principale ingrediente della continuità – e il mondo che cade sotto i nostri sensi, quando lo si voglia considerare da vicino con gli strumenti della matematica. Ed è veramente amichevole questa disputa tra fisica e matematica che, come due fratellini in tenera età, hanno gli stessi bisogni e crescono insieme. Conosciamo il mondo fisico per come lo percepiamo, e lo percepiamo per come siamo in grado di misurarlo. Nel momento in cui ci accingiamo a misurarlo, per mezzo di un righello, di una scala graduata, di un calibro, di un compasso o di un termometro, officiamo un rito di santificazione del numero. In quel momento diamo per scontato che il mondo sia continuo con una precisa corrispondenza fra ciò che vediamo e ciò che è lì realmente per essere visto. Ma non facciamo misure con strumenti infinitesimali, per questo dobbiamo accontentarci di stime della realtà relativamente approssimate.

Abbiamo una risposta pronta per ogni paradosso che Zenone possa tirar fuori dalla sua faretra: la continuità è soltanto un'impressione nella nostra coscienza, una costruzione mentale che eleva l'illusione al rango di realtà. Per quanto si sforzino di spiegare i paradossi riguardo ai fenomeni del moto per mezzo di modelli logici, non importa se costruiti mediante espressioni algebriche o serie infinite, i matematici mancheranno immancabilmente il loro scopo: quello di fornire una spiegazione fenomenologica dell'accordo necessitante tra una concezione fantastica del tempo e quella, non meno astratta, di un flusso continuo dell'Universo. Sì, i matematici possono dirci con precisione dove si trova la punta della freccia, possono calcolare l'istante in cui Achille raggiungerà la tartaruga, o farci sapere quando noi stessi saremo arrivati dalla parte opposta della stanza: ma non possono dirci il perché, in altro modo che forzando la nostra percezione dello spazio in rapporto alla nostra nozione del tempo, che noi pretendiamo sia rigidamente continuo.

Provate a domandare perché Achille raggiunge la tartaruga. La risposta sarà inevitabilmente: «Perché, in base a quanto ci dice l'algebra, si ha il raggiungimento quando...». Ripetete la domanda, e come tutta risposta vi si mostrerà un modello matematico. Sappiamo che il modello – quello approntato per darvi la risposta – presuppone che la retta dei numeri reali sia per natura continua. Ma la retta non può indicare con precisione la natura fenomenologica della materia reale, che si compone di atomi, che sono discreti (cioè, alla lettera, «separati»). Ciascun atomo ha un nucleo circondato da elettroni orbitanti i quali, eccitati da un pacchetto di energia, possono cambiare orbita, ma soltanto per salti discreti. E la stessa energia non è continua, ma si presenta in forma di «quanti di energia» discreti.

Provate a domandare perché la Terra orbita intorno al Sole secondo le traiettorie descritte dalle leggi di Keplero: la risposta sarà che la causa agente è la gravitazione universale. Evviva, la gravitazione universale ci dice che due corpi si attraggono con una forza inversamente proporzionale al quadrato delle loro distanze. Ma perché? La risposta è chiara. La forza è proporzionale all'accelerazione: è la formula con cui si esprime il secondo principio della dinamica di Newton, $F = ma$, che mette in relazione la forza con l'accelerazione attraverso la massa. Ma questi sono soltanto termini fisici che suggeriscono – a partire dall'osservazione della realtà, naturalmente – che c'è una forza di attrazione che può essere avvertita e misurata e che c'è un incremento di velocità (accelerazione) che può anch'essa essere misurata. Basta sapere che la forza di attrazione è tanto maggiore, quanto maggiore è l'accelerazione. Perciò si ha che: F = ma. Già, ma perché?

Perché se scagliamo un sasso lo vediamo poi continuare nella sua traiettoria, dopo che ha lasciato la mano? La risposta chiama in causa il primo principio della dinamica, cioè il principio di inerzia: il sasso continua a muoversi di moto uniforme, a meno che non agisca su esso una forza F = ma.[3] La traiettoria parabolica è una combinazione, appunto, di un moto rettilineo uniforme e di un moto accelerato verso il basso. Tutte le volte che ci vien fatto di chiedere perché, siamo messi nell'angolo con il contentino di una formula matematica che da principio era stata escogitata per mettere in relazione i fenomeni fisici.

Perché i campi elettrici e magnetici presentano una simmetria così spiccata, nel senso che la variazione di un campo elettrico induce un campo magnetico variabile, e viceversa? Perché avviene che entrambi siano, appunto, forme diverse di un'unica radiazione, la radiazione elettromagnetica? E perché la massa non è altro che una forma di energia? L'elenco potrebbe continuare. Voi domandate, la risposta che vi sarà data sarà immancabilmente un modello matematico.

La formulazione delle leggi della fisica in termini matematici è una cosa meravigliosa: segue di qui, forse, che la matematica abbia il diritto di dire l'ultima parola nella ricerca delle cause prime? Perché Achille raggiunge la tartaruga? Si dirà che ciò avviene perché una serie geometrica di ragione inferiore all'unità è convergente. Soddisfatti? No. Siamo più soddisfatti quando vediamo con i nostri occhi Achille nell'atto di superare la tartaruga. Perché la massa è un'altra forma di energia? «Perché $E = mc^2$», questa è la risposta del fisico. Soddisfatti? No. Gli orrendi bombardamenti di Hiroshima e Nagasaki sono una risposta più convincente.

Nel 1960 il premio Nobel Eugene Wigner scrisse un classico dal titolo *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*, nel quale raccontava la storia di uno statistico che illustra a un amico che mastica poco di matematica una sua pubblicazione sulle linee tendenziali di sviluppo della popolazione. Disse un giorno l'amico indicando il simbolo π: «Non mi dirai che la popolazione ha qualcosa che fare con la circonferenza del cerchio».

La storia di Wigner racchiude tre punti degni di considerazione: intanto, i problemi che scaturiscono dal mondo reale si traducono in nozioni matematiche imprevedibili e anche un po' strane; in secondo luogo, la conoscenza di nuovi concetti fisici può nascere dalla conoscenza di altri concetti; in terzo luogo, «l'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che confina con il mistero, non c'è alcuna spiegazione razionale che la giustifichi».[4] Come possiamo spiegare altrimenti la ragione per cui la matematica è in grado di mettere ordine nei dati grezzi raccolti dai fisici nel corso dell'indagine sulla natura? Secondo Wigner, «non sappiamo perché le nostre teorie funzionino così bene: perciò la loro precisione non costituisce una prova della loro verità e di un loro effettivo radicamento nel mondo fisico».

Per illustrare questo suo punto di vista, Wigner fa ricorso alla legge di gravitazione universale: «La legge di gravità stabilita da Newton, non senza fatica, e da lui verificata con una precisione del 4%, si è in seguito dimostrata precisa nell'ordine di un decimillesimo di percento. La legge di gravità è stata così strettamente associata all'idea di precisione assoluta che soltanto recentemente i fisici hanno trovato il coraggio di analizzare i limiti della sua precisione». Sembra che Newton sia più che altro inciampato in questa legge, ragionando sui dati grezzi ottenuti dalle misure e sviluppando vaghe impressioni, poco più che intuizioni empiriche. Riuscì così a trovare una formulazione matematica notevolmente semplice, grazie alla quale si ebbe una descrizione straordinariamente accurata del movimento, oltre che la spiegazione dell'interazione tra le masse. Ma questa legge non spiegava le cause. Questo «inciampo» di Newton, secondo Wigner, fu un miracolo. Si deve a questo inciampo se gli uomini sono sbarcati sulla Luna, se i robot si sono posati sulla sabbia rossa di Marte, se si sono potuti esplorare asteroidi e comete, se apparecchiature di registrazione sono state proiettate nello spazio per catturare le immagini dei confini dell'Universo visibile e inoltrarcele fin qui, sulla Terra.

Sarebbe meraviglioso trovare una risposta che spiegasse una volta per tutte i paradossi di Zenone: un'argomentazione riguardo alla continuità, forse, o uno stratagemma per sciogliere il mistero della struttura infinitesimale di una linea continua. Ma l'unica risposta sembra essere ancora quella di Zenone. È quella che diede ventiquattro secoli fa. Se gli domandassimo perché vediamo la freccia che lascia l'arco e raggiunge il bersaglio, lui risponderebbe, ancora una volta: «Apparenza, mera apparenza di cambiamento. Il movimento è illusione». Poi aggiungerebbe, probabilmente: «Avendo considerato il problema del moto per ben ventiquattro secoli, in tutti i suoi aspetti, sapete ora finalmente che perfino la materia non è nient'altro che energia, e viceversa. Niente è cambiato. Il mondo esterno non è che materia conosciuta soltanto per il tramite dei nostri sensi, che ci restituiscono illusioni: colore, odore, tatto e movimento».

Ringraziamenti

Quando Bertrand Russell scrisse – nella sua Introduzione alla filosofia matematica – «Vogliamo avere dieci dita, due occhi e un naso», aveva in mente il fine che i logici si erano prefissi allorché si fecero carico per la prima volta della definizione del numero, nella speranza che la definizione si applicasse nel modo giusto agli oggetti comuni. Per parte mia, mentre scrivevo questo libro, ho avuto molte dita, molti occhi e molti nasi, grazie all'aiuto di molti amici e colleghi che non hanno mancato di farmi avere il loro incoraggiamento nel corso di conversazioni informali e che hanno letto diligentemente le varie stesure del manoscritto migliorandolo con le loro critiche costruttive e con correzioni di decisiva importanza. In primo luogo ringrazio mia moglie, Jennifer, che ha letto il libro da capo a fondo, dopo avermi sentito che ne leggevo a voce alta più di un capitolo. Senza i suoi suggerimenti pratici questo libro non avrebbe visto la stampa. È lei il mio più grande supporto, la mia àncora e la mia ispirazione.

Sono estremamente grato a Stephen Morrow, editor presso la casa editrice Dutton, per aver adattato in modo brillante il mio frettoloso e incoerente brogliaccio in un progetto ordinato, significativo e originale. Ha fatto un lavoro di gran pregio nel riorganizzare la scaletta dell'ultima parte del libro. Ringrazio anche Jeffrey Galas, sempre della casa editrice Dutton, che ha curato l'aspetto redazionale di questo libro con interventi di editing e con validi suggerimenti, grazie ai quali ciò che dicevo è stato miracolosamente trasformato in ciò che intendevo dire. Senza i suoi interventi intelligenti e i suoi suggerimenti questo libro sarebbe stato illeggibile.

Un ringraziamento particolare va a tutti coloro che hanno letto ampi stralci del manoscritto, contribuendo con suggerimenti e correzioni a farne un libro coerente: John MacArthur e Travis Norsen del Marlboro College hanno apportato correzioni significative alle stesure dei capitoli sulla relatività e sulla teoria dei quanti, fornendo altresì molti degli esempi ivi riportati. James Callahan dello Smith College ha con generosità speso molte ore del suo tempo accanto a me nella revisione di dettaglio, consigliandomi altresì validamente nell'ultima stesura. Emily Grosholz della Pennsylvania State University, Mark Huibregtse dello Skidmore College, Robert Perlis della Louisiana State University hanno anch'essi dedicato tempo considerevole a questo libro, al quale hanno contribuito con consigli preziosi e correzioni importanti. Hanno apportato significative correzioni anche Sorina Eftim della John Hopkins University, Timothy David Hirrel, Peter Merideth e Mark Hollis del Marlboro College. Il mio grande amico Jay Birjepatil del Marlboro College ha letto stralci di una delle ultime stesure e mi ha dato i suggerimenti di un amico: ma il suo contributo più significativo è consistito – come sempre – nella sua brillante vicinanza intellettuale. Con tutti questi amici e splendidi consiglieri, molto speciali, ho un debito di gratitudine eterna.

Devo anche ringraziare in modo particolare Ray Bates, titolare dell'«officina» The British Clockmaker di Newfane, Vermont, per la cortesia con cui mi ha invitato nel suo laboratorio e mi ha insegnato tante cose sull'orologeria antica. Ringrazio Willene Clark del Marlboro College per non avermi fatto mancare il suo supporto e per le informazioni preziose sui vetri medievali. Ringrazio Udo Schubach per la sua amicizia e per avermi aiutato a procurare i documenti del Museo di Monaco. Ringrazio ancora Edward Adelson del Dipartimento di scienze cognitive del Mit, per avermi aggiornato sui processi cerebrali di elaborazione dei segnali visivi provenienti da oggetti in movimento. Anne Joffe, mia suocera – novantatun anni di età alle spalle e una straordinaria perspicacia nel presente, una persona per cui nutro profondo affetto – mi ha ascoltato mentre leggevo a voce alta alcune parti del manoscritto, facendomi domande che mi hanno stimolato a riflettere e aiutato a migliorare la forma della stesura definitiva.

Ho trovato ascoltatori e critici straordinari nelle serate di lettura organizzate da Sylvie Weil: Arlene Distler, Anne e Tony Gengarelly, Michael Kennedy, Jennifer Mazur, Franklin Reeve, Laura Stevenson, Sylvie Weil, Eric Weitzner e Anne Wheelock sono stati per me un banco di prova perfetto per la sperimentazione di stili di scrittura e toni espositivi.

Ringrazio ancora la disponibilità degli amici che non hanno letto il manoscritto originale ma che hanno ascoltato le mie numerose storie e che mi sono stati di ispirazione per l'esecuzione di un buon lavoro: Tadatoshi Akiba, William Bown, e Ian Steward. Ringrazio Evan Johnson, mio giovane vicino di casa e discepolo, per avermi aiutato a imparare il modo di insegnare la matematica e le scienze a un teenager. Come sempre, sono in debito di riconoscenza con il personale estremamente competente della biblioteca del Marlboro College: Mary White, Elsa Anderson, Radmilla Ballada e Elizabeth Dolinger, i quali mi hanno fornito cortese e preziosa assistenza nel trovare il materiale da citare e nell'ottenere i prestiti bibliotecari e che mi hanno dato incoraggiamento e disponibilità, spesso fuori dell'orario di servizio. Ringrazio Jennifer Brian e il personale della Special Collections & Archives Division della Nimitz Library presso l'Accademia navale, per la loro cortese ospitalità al tempo della mia ricerca sulla vita e l'opera di Albert Michelson.

Non saprei pressoché niente senza l'aiuto dei miei studenti: da loro ho appreso molto. Gli studenti del corso di lezioni che ho tenuto al Marlboro College su «Movimento e numeri» mi hanno indirizzato a pensare il modo migliore di presentare il materiale di questo libro. Questi studenti sono: Amber Nuite, Ambrose Sterr, Eliot Gluckman, Jessie McNabb, Joelle Montagnino, Joshua Lande, Samantha Williams, Emily Cahill, Evan Mehler e Brian Reed.

Grazie alla generosità di Bruce Cole e al suo albero di ciliegio, il progetto di questo libro è stato portato a termine in gran parte in un ambiente di lavoro di bellezza e comodità squisita, ai quali si deve quella serenità di spirito così necessaria alla scrittura.

Ringrazio ancora Barry e Gretchen Mazur che mi sono sempre stati vicini. Grazie a Catherine Mazur Jefferies, Tom Jefferies, Tamina Clark e Steven Clark. E, ancora, sono

grato alle mie nipoti Sophia e Yelena Mazur Jefferies e Lena Clark che mi hanno mostrato come apprendere nuove cose.

Infine, sono in debito di riconoscenza nei riguardi di molti storici e studiosi del XIX e XX secolo che hanno tradotto in linguaggio moderno e commentato le opere e l'epistolario dei matematici e degli scienziati antichi: a loro si deve la veridicità della storia raccontata in questo libro.

Note

1. Preambolo ai paradossi del moto

[1] Atistotele, Fisica, VI, 9.

2. La visita di Zenone ad Atene

[1] Omero, Iliade, XVIII, v. 570 nella traduzione di Vincenzo Monti.

[2] Omero, Odissea, VII, vv. 155 sgg., nella traduzione di Ippolito Pindemonte. La scena descrive la reggia dell'isola dei feaci.

[3] Antifonte era un nome abbastanza comune, e gli storici non sanno bene a quale Antifonte si riferisca Platone: l'oratore, l'interprete dei sogni o colui che tentò di risolvere il problema della quadratura del cerchio? O tutti e tre?

[4] Questo resoconto si basa su un dialogo di Platone, il Parmenide: Antifonte, uno dei personaggi del dialogo, riferisce ciò che ha udito da Pitodoro. Cfr. «Parmenide», in Platone, Tutte le opere, a c. di Giovanni Pugliese Carratelli, Sansoni 1993, pp. 333-366.

[5] Della vita di Zenone sappiamo ben poco. Secondo Aristotele, Zenone fu inventore della dialettica, un modo di argomentare che si sviluppa attraverso un seguito di affermazioni e confutazioni, finalizzate a isolare il nucleo di verità: la tattica consiste nel trarre conclusioni confutabili dalle posizioni dell'avversario. Il viaggio di Zenone ad Atene è raccontato nel Parmenide di Platone, che riferisce anche una piccola parte della sua filosofia. Qualche altra indicazione sulla vita di Zenone ci viene dalle Vite dei filosofi di Diogene Laerzio, scritte 700 anni dopo la morte del filosofo. Tuttavia, assumendo che Diogene avesse accesso per le sue ricerche biografiche a una raccolta ordinata di documenti, possiamo considerare le sue notizie ragionevolmente attendibili. Non bisogna confondere Zenone di Elea con l'altro Zenone, il fondatore dello stoicismo, Zenone di Cizio.

[6] Cfr. Platone, «Parmenide», in Tutte le opere, cit.

[7] L'argomentazione, alquanto complessa, è svolta nel dialogo platonico dallo stesso Parmenide: cfr. «Parmenide», in Platone, Tutte le opere, cit., X-XXVII.

[8] Genesi, 1, 6-8.

[9] Oliver Sacks, «Speed: Aberrations of Time and Movement», in The New Yorker, 23 agosto 2004.

[10] Al culmine della sua potenza, Atene contava su una popolazione che non raggiungeva i 300000 abitanti, più di metà dei quali era costituita da schiavi e da stranieri. Le donne e i bambini erano circa 200000.

[11] I cittadini di condizione libera e di pieno diritto.

[12] Il numero 1 è considerato «parimpari», perché aggiungendolo a un numero pari si ha un risultato dispari, e aggiunto a un numero dispari il risultato è pari. [N.d.T.]

[13] Per avere una replica più piccola del pentagono si traccino con la riga le rette che collegano ciascuno dei cinque vertici con ciascuno dei due vertici opposti. Per avere una replica più grande, si traccino con la riga le rette di prolungamento dei lati del pentagono: i punti di intersezione dei prolungamenti corrispondono ai vertici del nuovo pentagono. È possibile così replicare un singolo pentagono in un'infinità di pentagoni più piccoli e in un'infinità di pentagoni più grandi. Un singolo pentagono potrebbe riempire, per generazioni successive, l'intero Universo.

[14] Si trova quest'espressione, per la prima volta, negli Archive der Math und Physik, 1844, IV, pp. 15-22.

[15] Cfr. Thomas Little Heath, Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra, Cambridge University

Press, Cambridge 1910, p. 52.

[16] Cioè, la radice quadrata di 2 è un numero «irrazionale».

[17] Bertrand Russell, Scientific Method in Philosophy, Open Court, London 1914, p. 164.

[18] Diels-Kranz, fr. 23, in Alessandro Lami (a c. di), I presocratici. Testimonianze e frammenti da Talete ad Empedocle , Rizzoli, Milano 1991, p. 370.

[19] Sexti Empirici Adversus Mathematicos, X 315; Diels-Kranz fr. 6, in Alessandro Lami (a c. di), I presocratici, cit., p. 356.

[20] Diels-Kranz, fr. 38, in Alessandro Lami (a c. di), op. cit., p. 380.

[21] Cioè, il mare.

[22] Cioè, Titano che racchiude tutt'intorno l'etere.

[23] Diels-Kranz fr. 107, in Alessandro Lami (a c. di), op. cit., p. 230.

[24] Diels-Kranz fr. 2-3, in Alessandro Lami (a c. di), op. cit., p. 276.

[25] Nel V secolo a.C. i libri erano letti in pubblico direttamente dall'autore: non erano posti in vendita, come oggi.

[26] Charles Coulston (a c. di), Dictionary of scientific biography, Scribner's Sons, New York 2000.

[27] Questo ambiente, chiamato androne, era riservato ai soli uomini; l'ingresso era tuttavia consentito a schiave, musiciste e danzatrici adibite al servizio di simposio.

[28] Si consideri, per esempio, il numero 1/2. Qual è il successivo di questo numero, in ordine di grandezza? Sarà 3/4, o 5/8, o 9/16, oppure 17/32, o ancora qualche altro nunmero che possiamo scrivere nella forma $\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$? Ogni numero, determinato introducendo dentemente dal valore di n. Inoltre, maggiore è il valore di n, più il valore fornito dalla formula si approssima a 1/2, ma non c'è nessun valore di n che possa fare di questa frazione l'espressione del numero successivo di 1/2.

[29] Tobias Dantzig, Number: The Language of Science, Pi Press, New York, 2005, p. 132; trad. it. Il numero: linguaggio della scienza, La Nuova Italia, Firenze 1965.

[30] Questo brano, tradotto dal tedesco, si trova in Stephen Cole Kleene, Introduction to Mathematics, Van Nostrand, Princeton, NJ 1962, pp. 54-55.

3. Il mondo attraverso gli occhi di Aristotele

[1] Dobbiamo pensare che un libro dei tempi di Aristotele corrispondeva più o meno a un capitolo di un libro del giorno d'oggi. Secondo Diogene Laerzio, Aristotele scrisse ben 445270 righe di testo che, riprodotte in libri a stampa, corrispondono più o meno a venti o trenta libri d'oggi (dipende dalla densità del testo). Ma ciò che è veramente impressionante è l'ampiezza degli argomenti toccati con competenza dallo Stagirita.

[2] Qui e nel seguito le citazioni sono tratte dalla Fisica di Aristotele. Cfr. Aristotele, Fisica, Mimesis, Milano 2008 (traduzione con testo greco a fronte). [N.d.T.]

[3] Ciò avviene perché la somma della serie infinita di potenze di 1/2 è uguale a 1.

[4] Cioè, delle proprietà delle figure sottoposte a deformazione senza strappi, sovrapposizione o incollature.

[5] Aristotele, Fisica, VI, 9, 240a 5.

[6] Aristotele, Fisica, VII, 1, 241b 24.

4. La velocità come quantità

[1] Edward Gibbon, The Decline and Fall of the Roman Empire, Washington Square Press, New York 1962, vol. II, p.531, trad. it. Storia della decadenza e caduta dell'impero romano, Einaudi, Torino 1967.

[2] I «palmieri» citati in questi versi sono i pellegrini che, di ritorno dalla Terra Santa, ne riportavano una palma come testimonianza del viaggio affrontato. [N.d.T.]

[3] Le fonti che registrano il discorso di papa Urbano II risalgono a parecchi anni dopo il suo pronunciamento, perciò non c'è modo di verificare che cosa realmente il papa abbia detto. Esistono numerose versioni di questo discorso che differiscono per il linguaggio e che tuttavia concordano nell'intento. Cfr. Dana C. Munro, «The Speech of Pope Urban II at Clermont, 1095», in American Historical Review, 1906, vol. I, pp. 231-240.

[4] Ibidem. Lo stesso discorso si trova anche in Daniel J. Boorstin, The Discoverers, Random House, New York 1983, p. 118, trad. it. L'avventura della scoperta: una storia della ricerca umana per conoscere il mondo, Mondadori, Milano 1985.

[5] Cfr. Edward Grant, A Source Book in Medieval Science, Harvard University Press, Cambridge, MS 1974, p. 42, trad. it. Le origini medievali della scienza moderna: il contesto religioso, istituzionale e intellettuale, Einaudi, Torino 2001.

[6] Per un'edizione italiana con testo latino a fronte dei Commentari di san Tommaso vedi: Tommaso d'Aquino (san), Commento alla Fisica di Aristotele, Esd - Edizioni Studio Domenicano, Bologna 2004. [N.d.T.]

[7] C'erano allora due papi, uno a Roma, l'altro ad Avignone.

[8] Se un corpo in movimento copre la distanza s_1 in un tempo t_1 e, a parità di velocità, copre la distanza s_2 in un tempo t_2, allora s1/s2 = t_1/t_2.

[9] Sappiamo molto poco di questi personaggi della storia della matematica: gli stessi loro nomi sono incerti. Heytesbury può essere la stessa persona conosciuta in altri contesti come Hoghtelbury o Heightilbury. Richard Swineshead fu talvolta confuso con John Swineshead, altre volte con Roger Swineshead. Questo matematico di Merton, soprannominato «il calcolatore», era conosciuto anche con il nome di Suiseth. È stato il primo – per quanto si sa – ad aver mostrato che la serie di infiniti termini $1/2 + 2/4 + 3/8 + \ldots + n/2^{\mathbf{n}}$ converge a un numero finito. Tuttavia non sembra che abbia applicato questa conoscenza alla soluzione del paradosso zenoniano della dicotomia.

[10] Il suo libro riguardo al moto è Regulae solvendi sophismata. Si veda in proposito Curtis Wilson, William Heytesbury: Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics, University of Winsconsin Press, Madison, WI 1960.

[11] Il teorema dell'accelerazione è anche conosciuto come «teorema della velocità media». Nicola Oresme diede una dimostrazione di questo teorema al tempo in cui insegnava al collegio di Navarra, all'Università di Parigi. Per una dimostrazione geometrica del teorema dell'accelerazione, vedi Morris R. Cohen e I.E. Drabkin, A Source Book in Greek Science, Harvard University Press, Cambridge, MA.

5. Galileo Galilei, padre della scienza moderna

[1] Nel 1656 lo scienziato olandese Christiaan Huygens dimostrò che il periodo di oscillazione T di un pendolo vale: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, dove l è la lunghezza del pendolo e g è T = 2ð l / g l'accelerazione di gravità. Pertanto il periodo di oscillazione dipende soltanto dalla lunghezza del pendolo.

[2] Sister Maria Celeste, The Private Life of Galileo Compiled Principally from His Correspondence and That of His Eldest Daughter, a c. di Eugenio Albéri e Carlo Arduini, Nichols and Noyes, Boston 1870, p. 17.

[3] Si pensava da principio che la cocciniglia fosse di origine vegetale: più tardi si scoprì che veniva estratta da un insetto che, nutrendosi di certe varietà di cactus, ne trae il pigmento che entra in circolo nel suo organismo.

[4] Sister Maria Celeste, op. cit., pp. 17-18.

[5] Robert Roswell Palmer, A History of the Modern World, Alfred Knopf, New York 1961, p. 54, trad. it. Storia del mondo moderno, Editori Riuniti, Roma 1985.

[6] Il trattato De motu (va anche sotto il titolo De motu antiquiora), in latino, si trova nell'edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei: Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale, a c. di Antonio Favaro, Firenze, Barbera, 1964-1968, vol. I, pp. 243-419. Queste pagine possono essere consultate nel sito «Biblioteca digitale galileiana» dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze. L'edizione manoscritta (Ms. Gal. 71), conservata presso la Biblioteca centrale di Firenze, può essere consultata in rete accedendo al sito «Echo – European Cultural Heritage Online», sezione Scientific Revolution / Source Texts on Galileo. Per una traduzione inglese corredata di note, vedi: I.E. Drabkin e Stillman Drake (a c. di), Galileo Galilei on Motion and on Mechanics, The University of Wisconsin Press, Madison, WI 1960. [N.d.T.]

[7] «Rarefazione» non è che l'inverso della densità. L'aria è più rarefatta dell'acqua.

[8] Proviamo a riassumere la questione in termini moderni, con il senno del poi. In generale, un corpo in libera caduta in un fluido è soggetto a queste tre forze:
– la forza di gravità;
– la spinta di Archimede;
– la forza di attrito viscoso, che dipende dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto in libera caduta ed è proporzionale alla sua velocità.

Se la densità dell'oggetto è molto superiore a quella del fluido attraversato, la spinta di Archimede può essere trascurata. Parimenti può essere trascurata la forza di attrito, se – per esempio – studiamo il moto di libera caduta nell'aria di una sfera del diametro del palmo di una mano e, a maggior ragione, quello di una biglia (la forza di attrito non può invece essere trascurata se riduciamo quella sfera nella forma di una lamina sottile, perché si avrebbe una sorta di «effetto paracadute»). Nell'esempio che Galileo sta per proporre, dove l'esperimento (ideale o reale, non importa) viene fatto con un legnetto la cui densità è inferiore a quella dell'acqua, non sono più trascurabili né la spinta di Archimede, né la forza di attrito. In questo caso avviene che il corpo, dopo aver raggiunto la sua massima velocità di caduta, continui ad avanzare con moto rettilineo uniforme (è quel che avviene nel lancio con paracadute). [N.d.T.]

[9] Questi valori, rapportati alle nostre unità di misura, differiscono notevolmente da quelli che oggi si attribuirebbero all'inverso della densità dell'acqua e dell'aria, cioè alla loro rarefazione, che vale 0,001 m^3/kg e 0,83 m^3/kg, rispettivamente.

[10] Anche questo è un numero fittizio. Si osservi che Galileo sta confutando Aristotele, perciò può assumere che la velocità di caduta sia costante. Comunque, da un certo punto in poi, dopo il raggiungimento della velocità limite, le cose stanno proprio così. Si noti anche che le unità di misura della velocità che figura nei dati iniziali del problema sono arbitrarie, poiché per ottenere il risultato finale si calcolerà un rapporto tra velocità (adimensionale).

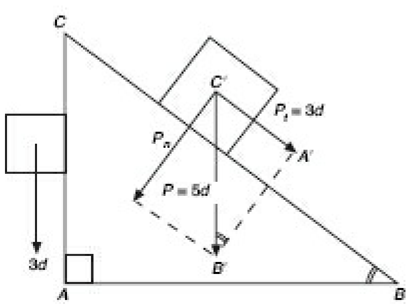
[11] Di fatto, ciò potrebbe non essere vero, ma tutto ciò di cui Galileo ha bisogno è un mezzo la cui rarefazione sia intermedia tra quella dell'aria e quella dell'acqua. Il benzene o il metanolo potrebbero fare alla bisogna.

[12] In termini moderni possiamo affermare che le velocità di caduta di una sferetta di alluminio in due mezzi che chiamiamo 1 e 2, rispettivamente, sono in rapporto fra loro come $\frac{v_1}{v_2}=\frac{P_A-P_1}{P_A-P_2}$, dove v_1 e v_2 sono, rispettivamente, le velocità di caduta del mezzo 1 e 1 A 1=v P P-2 A 2 2; P_A rappresenta il peso della sferetta di alluminio, mentre P_1 e P_2 sono i pesi del volume spostato dalla sferetta nel mezzo 1 e nel mezzo 2, rispettivamente, in base alla legge di Archimede.

[13] Qui Galileo mostra di ignorare il fenomeno di attrito superficiale, che determina un moto di rotazione allo strato d'aria aderente alla sfera, intorno all'asse della sfera stessa.

[14] La condizione di assenza di attrito non ha alcuna conseguenza sull'esito dell'«esperimento mentale», tuttavia aiuta a immaginare la catena assoggettata alla sola forza di gravità.

[15] Possiamo immaginare, adagiati sulle superfici del prisma, due pesi effettivi: si veda la figura qui sotto. Il blocco sulla superficie inclinata rappresenta il peso della parte di collana distribuita sulla superficie inclinata. Il blocco più piccolo, lungo il cateto verticale, rappresenta il peso della parte di collana che pende liberamente. Si noti che la componente efficace della forza-peso relativa al blocco maggiore, cioè la componente parallela all'ipotenusa, ha lo stesso valore della forza-peso agente sul blocchetto minore.



P = forza peso
P_t = componente tangenziale del peso
P_n = componente normale del peso

$\overline{BC} = 5$
$\overline{AB} = 4$
$\overline{AC} = 3$

Per la similitudine dei triangoli ABC e A'B'C' si ha:

$$\frac{P_t}{P}=\frac{3}{5} \text{ ossia } P_t=\frac{3}{5}P=\frac{3}{5}\cdot 5d=3d$$

[16] James R. Newman (a c. di), The World of Mathematics, Simon & Schuster, New York 1956, vol. II, p. 728.

6. Evoluzioni planetarie

[1] L'idea di epiciclo risale al III secolo a.C., allorché furono introdotti da Apollonio di Perga nel suo modello dell'Universo. Possiamo pensare un epiciclo come un'orbita circolare assoggettata essa stessa a un moto di rotazione (o rivoluzione). Dunque il pianeta si sposta lungo un epiciclo che è un circolo più piccolo il cui centro si sposta lungo un circolo maggiore, detto deferente. Nel sistema geostazionario il centro del circolo deferente è la Terra. Gli epicicli si resero necessari per dare una spiegazione al fatto che talvolta i pianeti retrocedevano, per brevi tempi. Questa apparenza di moto all'indietro prende il nome di «moto retrogrado».

[2] Così comincia il Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo.

[3] Vedi il Timeo di Platone, 54a-55c.

[4] Da James R. Newman (a c. di), The World of Mathematics, Simon & Schuster, New York 1956, vol. II, p. 223.

[5] Hermann Weyl, Symmetry, Princeton University Press, Princeton, NJ 1983.

[6] Ibidem, p. 228.

7. Un passo indietro per la misura del tempo

[1] Se si prescinde dalla contrazione di Lorentz.

[2] Genesi, 1, 3-5.

[3] In base alla legge di Hooke, se a una molla tenuta in posizione verticale appendiamo un peso di 1 kg determinando un'estensione della media pari a 1 cm, allora appendendo un peso di 2 kg l'estensione sarà pari a 2 cm. Occorre tuttavia tener presente che: a) la legge non si applica oltre il limite di snervamento della molla; b) una molla reale presenta sempre inevitabili imperfezioni le quali fanno sì che il comportamento reale differisca da quello ideale.

[4] Si ritiene che sia stato costruito nel 1094. Per una descrizione dettagliata del funzionamento di quest'orologio, si veda D.S. Landes, Storia del tempo: l'orologio e la nascita del mondo moderno, A. Mondadori, Milano 1984.

[5] G.H. Baille, C. Clutton e C.A. Ilbert, Britten's Old Clocks and Watches and Their Makers, Bonanza Books, New York 1956, pp. 5-6.

[6] Nel corso dello sviluppo dell'arte dell'orologeria sono stati inventati e utilizzati numerosi generi di scappamento. È possibile trovarne un'eccellente rassegna in A.L. Rawlings, The Science of Clocks and Watches, a c. di Timothy e Amyra Treffry, The British Horological Institute, Upton 1994.

[7] Il problema di mantenere piccolo l'angolo di oscillazione esiste comunque, sia quando l'oscillatore è costituito da un meccanismo a bilanciere, sia quando è un pendolo. In particolare, nell'oscillatore a pendolo il periodo T di oscillazione è praticamente indipendente dall'angolo α di oscillazione, ed è pari a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, dove l è la lunghezza T = 2ð l / g del pendolo e g l'accelerazione di gravità, soltanto quando l'angolo α sia inferiore a 5 gradi. In generale, il periodo di un pendolo è dato da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \operatorname{sen}^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \operatorname{sen}^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cdots\right\}$$

dove i puntini significano che segue un numero infinito di termini contenenti potenze pari crescenti di sen(α/2). Nel caso di piccole oscillazioni sen(α/2) è molto piccolo, perciò tutti i termini fra parentesi graffe successivi al primo sono trascurabili. Un altro modo di costruire un oscillatore a bilanciere – alternativo a quello appena presentato – consiste nel prendere una striscia di acciaio flessibile e conficcarne l'estremità inferiore su un basamento. Si applichi quindi un peso all'estremità superiore, che potrà così andare avanti e indietro, essendo la striscia flessibile. Avremo così costruito una sorta di pendolo rovescio, dove però la traiettoria della massa oscillante non corrisponde a un arco di circonferenza, ma è una curva isocrona.

[8] Il problema, al solito, è ottenere l'uniformità di avanzamento della ruota dentata, alla quale è collegato un indicatore del tempo. Poi l'altra camma riceve un impulso dalla ruota e l'àncora inverte il moto di rotazione oscillatoria. La seconda camma si disimpegna, poi viene il momento in cui sarà la prima camma a ricevere un impulso dalla ruota, tale da invertire il movimento dell'àncora. E così via. Dunque l'oscillatore costituito dal volano e dalla molla, il cui periodo di oscillazione è costante, riceve energia dalla ruota dentata tramite il meccanismo di scappamento che a sua volta regola la velocità di avanzamento della ruota dentata. Anche in questo caso la ruota dentata è azionata da una forza motrice (la caduta di un peso o la molla della «carica» dell'orologio). [N.d.T.]

[9] Nella storia dello sport si annovera un numero straordinario di tempi determinati spaccando il capello. Due sciatori di fondo, dopo una gara durata parecchie ore, hanno «tagliato il traguardo» consecutivamente, con uno scarto di un centesimo di secondo. È avvenuto nel 1990 alle Olimpiadi invernali di Lake Placid.

8. Cartesio e la magia degli assi coordinati

[1] Il cerchio (e con esso la circonferenza) era definito come un insieme di punti determinati da una specifica regola di

costruzione. Euclide definiva il cerchio come «una figura piana contenuta da una sola linea, in mezzo alla quale c'è un punto [il centro], tale che tutti i segmenti di retta che abbiano un estremo in quel punto e l'altro sulla linea sono fra loro eguali».

[2] Per esempio, cambiano simultaneamente le coordinate x e y di un punto P che si sposti lungo una parabola di equazione $y = ax^2 + b$.

[3] Occorre anche definire il campo di variazione di x.

9. La traiettoria della freccia

[1] P. Gregorii a S^{to} Vincentio, Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum, Apud Ioannem et Iacobum Meursios, Antverpiae 1647. Il testo latino e la traduzione dei primi due libri, a cura di Ian Bruce, si trovano nel sito di Ian Bruce: «Some Mathematical Works of the 17th &18th Centuries», all'indirizzo http://www.17centurymaths.com. Il paradosso di Zenone è trattato nel secondo libro, a proposito delle progressioni geometriche.

[2] Per il suo lavoro sulle coniche, Grégoire de Saint-Vincent fu in seguito accreditato da Leibniz, Fermat e Cartesio come uno dei fondatori della geometria analitica.

[3] Hal Hellman, Le dispute della scienza: le dieci controversie che hanno cambiato il mondo, Raffaello Cortina, Milano 1999.

[4] Tobias Dantzig, Number, the language of science, Pi Press, New York 2005, p. 135, trad. it. Il numero: linguaggio della scienza, La Nuova Italia, Firenze 1965.

[5] Per realizzare questo genere di moto possiamo pensare a una navicella spaziale che viaggi nel vuoto – quindi in assenza di attrito – facendo in modo che i propulsori le imprimano una spinta sempre maggiore: una specie di moto, per così dire, a strappo continuo. [N.d.T.]

[6] Per calcolare in questo modo l'area sottesa dalla parabola nell'intervallo 0-2 s, cominciamo con il dividere tale intervallo in un numero di segmenti, n, abbastanza grande. Quindi consideriamo gli n rettangoli elementari così generati (si veda la figura). La base di ciascuno di essi misura 1/n dell'intervallo considerato, cioè 2/n. L'altezza di ciascun rettangolo è invece data dal valore che la funzione quadratica assume in corrispondenza del primo estremo della base, ossia in corrispondenza di: $0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2(n-1)}{n}$. La somma delle aree dei rettangoli è perciò:

$$A_n = \frac{2}{n}\cdot 0^2 + \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \dots + \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^3\left[1^2+2^2+\dots+(n-1)^2\right] = \left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

[N.d.T.]

[7] La somma dei quadrati dei primi k numeri naturali vale:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Perciò, ponendo $k = n - 1$, possiamo riscrivere la formula dell'area totale approssimante nella forma:

$$A_n = \left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{8}{n^3}\left\{\frac{(n-1)\cdot n\cdot\left[2(n-1)+1\right]}{6}\right\} = \frac{4}{3}\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\right) = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

[N.d.T.]

[8] Si veda George Johnston Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, Arno Press, New York 1976: «Tracciò un poligono che presentava un numero di lati doppio del precedente; quindi, ripetendo il procedimento più volte ancora, fino a esaurire la superficie, arrivò alla conclusione che sarebbe arrivato a inscrivere nel circolo un poligono i cui lati, a causa della loro brevità, si sarebbero confusi con la circonferenza ».

[9] Simili figure furono presentate anche da Fermat, Oresme e Roberval.

[10] Galileo aveva già ragionato in questo modo nel suo Dialogo sopra i massimi sistemi, nel quale mostrò come il moto accelerato possa essere analizzato come una sommatoria di contributi infinitesimi di moto uniforme. Ringrazio Emily Grosholz per avermi informato del fatto che Galileo riprese e migliorò questa idea degli studiosi di cinematica di Oxford.

[11] Carl B. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, New York 1949, p. 295, trad. it.

Storia del calcolo e del suo sviluppo concettuale, Bruno Mondadori, Milano 2007.

[12] Ricordiamo la definizione di serie geometrica di ragione x:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Se n tende all'infinito, diremo che la serie geometrica è infinita. In particolare, la serie geometrica infinita è convergente se - 1 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ Per esempio, per $x = \frac{1}{2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2}$.

[13] Florian Cajori, A History of Mathematics, Chelsea, New York 1985, pp. 181-182.

10. Avanti verso il secolo dei Lumi

[1] Ecclesiaste, 1, 5-7.

[2] John Milton, Paradiso perduto, VIII, 66-84.

[3] Il movimento inerziale di un corpo dipende soltanto dalla sua massa.

[4] Infatti, in base all'equazione fondamentale della meccanica classica – il secondo principio della dinamica stabilito da Newton – la forza è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione.

[5] La forza gravitazionale che si esercita fra due corpi è inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa e direttamente proporzionale al prodotto delle masse.

[6] Questa formula viene ricavata facilmente confrontando le due formule – quella della velocità e quella dello spostamento – considerate nel capitolo 4, a proposito del moto uniformemente accelerato:

$$v = gt \qquad s = \frac{1}{2}gt^2$$

[N.d.T.]

[7] James R. Newman (a c. di), The World of Mathematics, Simon & Schuster, New York 1956, vol. II p. 140.

[8] Il dialogo che segue è a grandi linee estratto dal saggio di Herbert Warren Turnbull, «The Great Mathematicians», in James R. Newman (a c. di), The World of Mathematics, cit., p. 144.

[9] Dalla biografia di Isaac Newton scritta da William Stukeley: vedi il manoscritto 142 nel sito «The Newton Project», all'indirizzo Internet:

http://www.newtonproject.sussex.ac.uk

(il manoscritto si trova nella sezione «View Other texts and Resources», sottosezione «Biographical Materials about Newton», 1727-1799, item n. 62).

[10] W.T. Whiteside (a c. di), The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, Cambridge 1976, vol. II pp. 8-9n.

[11] Le memorie e i resoconti di Conduitt si trovano, al pari della biografia di Newton scritta da Stukeley, nel sito «The Newton Project», cit., nella stessa sezione.

[12] Il brano citato è estratto dall'articolo di E.N. da C. Andrade «Isaac Newton», in James R. Newman (a c. di), The World of Mathematics, cit., p. 257.

[13] Newton stabilì inoltre che la costante di proporzionalità C che figura nella terza legge di Keplero considerata al punto 4). si trova in relazione con la massa del Sole, così:

$$C = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_S + m_P)}$$

Essendo la massa del Sole molto maggiore della massa dei pianeti, possiamo assumere in questa dimostrazione semplificata che $(m_S + m_P)$ □ m_S: l'errore è di soltanto qualche decimo percentuale. Si avrà allora:

$$C \simeq \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S}$$

Sostituendo questo valore nella formula in evidenza al punto 6) si ha:

$$F_S = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$$

Si osservi che la costante di gravitazione universale fu determinata in laboratorio, nel 1798, da Henry Cavendish, per mezzo di una bilancia di torsione. La dimostrazione presentata in queste righe è concepita con il senno del poi, cioè tenendo conto dei successivi sviluppi della fisica. [N.d.T.]

[14] Per una mirabile descrizione storica dei primi caffè si veda Tom Standage, History of the World in 6 Glasses, Walker, New York 2005, trad. it. Una storia del mondo in sei bicchieri, Codice, Torino 2005.

[15] Il completamento dell'opera richiese ventun anni.

11. La velocità della luce

[1] William Wordsworth, Il preludio, Mondadori, Milano 1999.

[2] Le goccioline di pioggia hanno una loro parte nell'arcobaleno, che però è dovuto al fenomeno di rifrazione della luce, e non a quello di riflessione.

[3] Alhazen (965-1035) riteneva che la velocità della luce fosse finita, ma non aveva modo di provarlo sperimentalmente.

[4] Sagredo rappresenta nei Discorsi una posizione equidistante, Simplicio è un fautore della filosofia peripatetica, cioè è un seguace di Aristotele, Salviati è l'alter ego di Galileo.

[5] Questa differenza tra la velocità stabilita da Rømer e la velocità della luce misurata oggi con maggior precisione è dovuta al fatto che non era abbastanza accurata la determinazione del valore Δt introdotto nei calcoli. Oggi, sapendo che la velocità della luce è 300000 km/s e sapendo che la differenza tra distanza massima e minima che separa Giove dalla Terra è $300 \cdot 10^{6}$ km, siamo in grado di stimare che l'eclissi di Io comincia con un ritardo di poco superiore a 16,5 min.

[6] Il primo orologio regolato da un oscillatore a pendolo risale al 1656: grazie a questa innovazione, la misura del tempo divenne dieci volte più accurata.

[7] Thomas Young, «Experimental Demonstration of the General Law of the Interference of Light», in Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1804, vol. XCIV.

[8] Un'ottima trattazione dell'argomento, di facile lettura, si trova in: Robyn Arianrhod, Einstein's Heroes: Imagining the World Through the Language of Mathematics, Oxford University Press, New York 2005.

12. La rivoluzione spazio-temporale

[1] In realtà la velocità della luce era già stata determinata, ma le misure precedenti – come quella, per esempio, di Fizeau – non erano abbastanza accurate: una precisione del 5% non bastava. [N.d.T.]

[2] Sappiamo oggi, con buona precisione, che la velocità della luce nel vuoto è 299792,458 km/s.

[3] L'uso della parola «muoversi» è qui del tutto particolare. Infatti, per definizione l'etere è stazionario, perciò il movimento di qualunque cosa, compresa la Terra, è un movimento relativo all'etere.

[4] Avremmo potuto assumere un sistema di riferimento solidale con la Terra. In tal caso si sarebbero ottenute le seguenti velocità, calcolate in base alla composizione (galileiana) delle velocità: nel viaggio di andata, c – v, perché la luce procederebbe avendo contrario il cosiddetto «vento d'etere», considerato che adesso la Terra è ferma; in quello di ritorno, c + v, perché la luce avrebbe il vento d'etere a favore. Si è scelto un sistema di riferimento solidale con l'etere per analogia a quanto si farà nel seguito del ragionamento, dove il calcolo del movimento riferito all'etere risulta facilitato. Il risultato, ai fini del ragionamento, non cambia. [N.d.T.]

[5] La lunghezza del braccio non sarebbe più d ma d'':

$$d' = d \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Pertanto il tempo t_1 di andata e ritorno del raggio di luce nel primo braccio non sarebbe più quello considerato in precedenza, ma questo:

$$t_1' = \frac{2dc}{c^2-v^2} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2dc}{c^2-v^2} \cdot \sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = \frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Come si vede, la contrazione del braccio nella direzione del moto è tale da rendere esattamente uguali il tempo impiegato dal raggio di luce nel percorso di andata e al ritorno nel primo braccio, come nel secondo (che, essendo perpendicolare alla direzione del moto, non subisce contrazione). Si ha cioè:

$\ell_1 = \ell_2$

Viene così miracolosamente salvata, grazie all'ipotesi di Fitzgerald, l'idea del moto assoluto. Questa sarebbe la ragione per cui l'esperimento non ha manifestato alcuno spostamento delle frange di interferenza tra i due raggi. [N.d.T.]

[6] È importante tenere a mente che qui si parla di velocità degli oggetti e della luce che si spostano nel vuoto. Nell'aria un oggetto può spostarsi più celermente della velocità della luce nell'aria, ma non più velocemente della velocità della luce nel vuoto. Niente può essere più veloce della luce che si propaga nel vuoto.

[7] In realtà, per una velocità superiore a quella della luce, la formula introdotta da Fitzgerald suggerisce che la lunghezza sia espressa da un numero immaginario.

[8] Nel 1899 il fisico inglese Joseph John Thomson (meglio conosciuto come J.J. Thomson) riuscì a misurare separatamente la carica elettrica e la massa delle particelle cariche. Questi esperimenti non avrebbero potuto aver luogo se non fosse stato messo a punto un metodo ingegnoso di estrazione dei gas dai tubi, per opera di Heinrich Geissler, soffiatore di vetro e fisico sperimentale. Per un resoconto dettagliato, si veda John Gribbin, The Scientists: A History of Science Told Through The Lives of Its Greatest inventors, Random House, New York 2002, pp. 490-493.

[9] Cfr. Hendrik A. Lorentz, Albert Einstein e Hermann Weyl, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity, Dover, New York 1952.

[10] Normalmente una variabile dipendente non comporta un aumento della dimensionalità. Tuttavia, in questo caso, la variabile tempo dipende dal sistema di riferimento. Questo rende le cose globalmente più complesse, facendo sì che la variabile tempo si manifesti alla stregua di dimensione (spaziale) extra.

[11] John Gribbin, The Scientists: A History of Science, cit., p. 393.

[12] Queste idee sono espresse in una pubblicazione ora tradotta in inglese: A.P. French (a c. di), Einstein: a Centenary Volume, Harvard University Press, Cambridge, MS 1979, p. 281.

[13] Paul Davies, About Time: Einstein's Unfinished Revolution, Touchstone, New York 1996, p. 47, trad. it. I misteri del tempo: l'universo dopo Einstein, Mondadori, Milano 1996.

[14] Da una lettera di Albert Einstein a Herbert Samuel (13 ottobre 1950): si veda Herbert L. Samuel, Essay in Physics, Harcourt Brace & Company, New York 1950, p. 158.

[15] In matematica una funzione si dice «liscia» se ammette derivate parziali di qualsiasi ordine. Ai fini di questo libro sarà sufficiente intendere che la sua rappresentazione grafica non presenti spigoli acuti, discontinuità all'infinito o strappi.

13. Oplà! La struttura delle cose è nuovamente granulare

[1] Herbert G. Wells, The Outline of History, Garden City, New York 1920, vol. II, p. 829, trad. it. Breve storia del mondo, Sansoni, Firenze 1958.

[2] Vi sono tuttavia problemi la cui soluzione richiede che si faccia ricorso ad approssimazioni o a metodi numerici, per esempio quando si consideri un sistema di tre corpi in moto e soggetti all'influsso della reciproca attrazione gravitazionale. In questi casi è giocoforza rinunciare a una soluzione esatta e di forma – come si dice – «chiusa».

[3] Il modulo quadro $|\psi^2|$ della funzione d'onda ψ misura la probabilità di trovare una particella nella posizione (x, y, z) nel tempo t.

[4] Il fisico teorico tedesco Wilhelm Wien dimostrò questo assunto nel 1893, in relazione a un radiatore ideale, il cosiddetto corpo nero, con assorbimento o irraggiamento perfetto della luce.

[5] Per avere un'idea di quanto piccola sia la costante di Planck, h, ricordiamo che 1 joule (J) misura il lavoro richiesto per innalzare di un metro una massa di 102 g (una piccola mela), vincendo la forza del campo gravitazionale terrestre.

[6] Louis de Broglie, Matter and Light: the New Physics, Dover, New York, p. 220, trad. it. Materia e luce, Bompiani, Milano 1943.

[7] Albert Einstein, «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt» in Annalen der Physik, Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1905, XVII, 4, pp. 132-148.

[8] Il termine fotone – che entrò nell'uso solo nel 1926 – qui sta per «quanto di luce».

[9] Citazione tratta dal libro, assolutamente raccomandabile: John Gribbin, The Scientists. A History of Science Told Through The Lives of Its Greatest Inventors, Random House, New York 2002, p. 511.

[10] La quantità di moto di un corpo in movimento è definita come il prodotto della sua massa per la velocità: p = mv. È

in relazione con la forza agente sul corpo, nel senso che la forza è uguale alla variazione della quantità di moto rapportata all'intervallo di tempo in cui tale variazione è avvenuta.

[11] La lunghezza d'onda è la distanza alla quale si ripete un ciclo dell'onda periodica che si propaga.

14. Se nel movimento non c'è un evento successore, che cosa viene dopo?

[1] Le forze qui menzionate sono le cosiddette forze fondamentali della natura. Riassumendo: a) l'interazione nucleare forte è quella di intensità maggiore, ed è quella che tiene insieme il nucleo dell'atomo; b) l'interazione nucleare debole è una forza con raggio d'azione molto limitato, ed è quella che presiede al decadimento beta dei neutroni in protoni, per esempio, nonché ai processi di fusione che si consumano nelle stelle; c) la forza elettromagnetica è quella che tiene insieme atomi, molecole, solidi e liquidi; d) la forza gravitazionale è la più debole delle quattro forze.

[2] Brian Greene, The Elegant Universe, Norton, New York 1999, p. 139.

[3] Si tratta delle superfici di Kummer.

[4] Per coloro che sono versati in matematica: in geometria differenziale, se la metrica è Ricci-piatta, è sempre uguale a zero la traccia del tensore di curvatura di Riemann (la matrice multidimensionale che classifica l'intensità di curvatura dello spazio in ogni punto, indipendentemente dal sistema di riferimento).

[5] Sono grato al prof. Andrew J. Hanson della Indiana University per questa immagine bidimensionale della sezione di una varietà di Calabi-Yau esadimensionale. Si veda anche il sito del prof. Hanson: http://www.cs.indiana.edu/~hanson.

15. Flusso a senso unico

[1] Questa e le citazioni seguenti sono tratte da: William James, The Principles of Psychology, Dover, New York 1950, p. 244.

[2] Hermann von Helmholtz, Handbook of Physiological Optics, Leopold Voss, Leipzig 1925, p. 372. Si veda anche il cap. 6, «Recent Progress in the Theory of Vision», in Hermann von Helmholtz, Science and Culture: Popular and Philosophical Essays, University of Chicago Press, Chicago 1995, p. 127.

[3] In questo caso a = g, cioè l'accelerazione è quella di gravità.

[4] Eugene Wigner, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», in Communication in Pure and Applied Mathematics, 1960, vol. XIII, n. 1.

Bibliografia

Allman George Johnston, Greek Geometry from Thales to Euclid, Arno Press, New York 1976.

Arianrhod Robyn, Einstein's Heroes: Imagining the World Through the Language of Mathematics, Oxford University Press, New York 2005.

Aristotele, Il cielo, Bompiani, Milano 2002.

—, Fisica, Mimesis, Milano 2008.

Baille G.H., Clutton C. e Ilbert C.A., Britten's Old Clocks and Watches and Their Makers, Bonanza Books, New York 1956.

Barnes Jonathan, Early Greek Philosophy, Penguin, London 1987.

Bietkowski Henryk e Zonn Wlodzimierz, The World of Copernicus, Arkady, Warszawa 1973.

Black Max, The Nature of Mathematics: A Critical Survey, Routledge & Kegan Paul, London 1933.

Boardman John, Griffin Jasper e Murray Oswyn (a c. di), Storia del mondo classico, Lucarini, Roma 1991.

Bochner Salomon, The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton University Press, Princeton, NJ 1966.

Bohr Niels, «On the Application of the Quantum Theory to Atomic Structure», in Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge University Press, Cambridge 1924.

—, «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?», in Physical Review, 1935, vol. XLVIII, pp. 696-702.

Bolles Edmund Blair (a c. di), Galileo's Commandment, 2,500 Years of Great Science Writing, W.H. Freeman, New York 1999.

Bolzano Bernard, I paradossi dell'infinito, Bollati Boringhieri, Torino 2003.

Boorstin Daniel J., L'avventura della scoperta: una storia della ricerca umana per conoscere il mondo, Mondadori, Milano 1985.

Boyer Carl B., Storia del calcolo e del suo sviluppo concettuale, Bruno Mondadori, Milano 2007.

Broglie Louis de, Materia e luce, Bompiani, Milano 1943.

Bridgman P.W., A Sophisticate's Primer of Relativity, Wesleyan University Press, Middletown, CT 1962.

—, La logica della fisica moderna, Boringhieri, Torino 1984.

Buchanan Scott, Truth in the Sciences, University Press of Virginia, Charlottesville, VA 1972.
Burke Kenneth, Attitudes Toward History, Beacon Press, Boston 1961.
Bynum W.F., Browne E.J. e Porter Roy (a c. di), Dizionario di storia della scienza, Theoria, Roma 1988.
Cahan David (a c. di), Science and Culture: Popular and Philosophical Essays, University of Chicago Press, Chicago 1995.
Cajori Florian, «The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Deveiopment of the Theory of Limits», in The American Mathematical Monthly, 1915, vol. XXII, n. 1.
—, A History of Mathematics, Chelsea, New York 1985.
Cardwell Donald, The Norton History of Technology, Norton, New York 1994.
Ciani Maria Grazia (a c. di), Tutto Omero. Iliade e Odissea, Marsilio, Padova 2007.
Clagett Marshall, Greek Science in Antiquity, Books for Libraries Press, Plainview, NY 1955.
Cohen Morris R. e Drabkin I.E., A Source Book in Greek Science, Harvard University Press, Cambridge, MA 1948.
Coulston Charles (a c. di), Dictionary of scientific biography, Scribner's Sons, New York 2000.
D'Espagnat Bernard, «The Quantum Theory and Relativity», in Scientific American, novembre 1979.
Dantzig Tobias, Il numero: linguaggio della scienza, La Nuova Italia, Firenze 1965.
Dauben Joseph, Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Princeton University Press, Princeton, NJ 1990.
Davies Paul, I misteri del tempo: l'universo dopo Einstein, Mondadori, Milano 1996.
Dehaene Stanislas, The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Oxford University Press, New York 1997.
Dijksterhuis Eduard Jan, Archimede, Ponte alle Grazie, Firenze 1989.
Diogene Laerzio, Vite e dottrine dei più celebri filosofi, Bompiani, Milano 2005.
Dodds Eric Robertson, The Greeks and The Irrational, University of California Press, Berkeley, CA 1959.
Drabkin I.E. e Drake Stillman (a c. di), Galileo Galilei on Motion and On Mechanics, The University of Wisconsin Press, Madison, WI 1960.
Durell Clement, La relatività con le quattro operazioni, Boringhieri, Torino 1982.
Eddington Arthur Stanley, The Mathematical Theory of Relativity, Chelsea, New York 1975.
Einstein Albert, Relatività. Esposizione divulgativa, Bollati Boringhieri, Torino 1980.
Erodoto, Storie, a c. di L. Annibaletto, A. Mondadori, Milano 2007.
Esiodo, Le opere e i giorni - Lo scudo di Eracle, Rizzoli, Milano 1979.
Esiodo, Teogonia, Rizzoli, Milano 1984.
Farrington Benjamin, Storia della scienza greca, A. Mondadori, Milano 1964.
Feeney Denis, The Gods in Epic: Poets and Critics of the Classical Tradition, Clarendon Press, Oxford 1991.
Fölsing Albrecht, Albert Einstein, A Biography, Viking, New York 1997.

Fowler David, The Mathematics of Plato Academy, Oxford University Press, London 1987.
French A.P., The Growth of the Athenian Economy, Routledge & Kegan Paul, London 1964.
— (a c. di), Einstein: a Centenary Volume, Harvard University Press, Cambridge, MS 1979.
Galilei Galileo, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Boringhieri, Torino 1958.
Galison Peter, Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré. Imperi del tempo, Raffaello Cortina, Milano 2004.
Garner Jane F. e Wiedemann Thomas, The Roman Household: A Sourcebook, Routledge, London 1991.
Geymonat Ludovico, Galileo Galilei, Einaudi, Torino 1984.
Gibbon Edward, Storia della decadenza e caduta dell'impero romano, Einaudi, Torino 1967.
Goodstein Reuben Louis, Essays in the Philosophy of Mathematics, Leicester University Press, Leicester 1965.
Gott J. Richard, Viaggiare nel tempo: la possibilita fisica di spostarsi nel passato e nel futuro, Mondadori, Milano 2002.
Grant Edward, Le origini medievali della scienza moderna: il contesto religioso, istituzionale e intellettuale, Einaudi, Torino 2001.
Graves Robert, I miti greci, Longanesi, Milano 2008.
Greene Brian, The Elegant Universe, Norton, New York 1999.
Greenberg Noah, Auden W.H. e Chester Kallman (a c. di), An Elizabethan Song Book, Doubleday, Garden City, NJ 1955.
Greenblatt Steven, Will in the World, How Shakespeare Became Shakespeare, Norton, New York 2004.
Gribbin John, The Scientists: A History of Science Told Through The Lives of Its Greatest inventors, Random House, New York 2002.
Grünbaum Adolf, Modern Science and Zeno's Paradoxes, Wesleyan University Press, Middletown, CT 1967.
Hall Alfred Rupert, Filosofi in guerra: la polemica tra Newton e Leibniz, il Mulino, Bologna 1988.
Hellman Hal, Le dispute della scienza: le dieci controversie che hanno cambiato il mondo, Raffaello Cortina, Milano 1999.
von Helmholtz Hermann, Handbook of Physiological Optics, Leopold Voss, Leipzig 1925.
—, Science and Culture: Popular and Philosophical Essays, University of Chicago Press, Chicago 1995.
Hersh Davis, Descartes' Dream, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, FL 1986.
Holt Jim, «Time Bandits», in The New Yorker, 28 febbraio 2005.
Holton Gerald, Introduction to Concepts and Theories in Physycal Science, Addison-Wesley, Reading, MS 1952.
—, The Scientific Imagination: Case Studies, Cambridge University Press, Cambridge 1978.
Hoyle Fred, Nicolaus Copernicus, Harper & Row, New York 1973.

Huggett Nick (a c. di), Space from Zeno to Einstein: Classic Readings with a Contemporary Commentary, Mit Press, Cambridge, MS 1999.
Hume David, Ricerca sull'intelletto umano, Laterza, Bari 1996.
William James, The Principles of Psychology, Dover, New York 1950.
Jourdain Philip E.B., «The Flying Arrow: An Anachronism», in Mind, 1916, vol. XXV, n. 97.
Kelman P.J. e Spelke E.S., «Perception of Partly Occluded Objects in Infancy», in Cognitive Psychology, 1983, vol. XV, pp. 483-524.
Kirk Geoffrey Stephen e Raven John E., The Presocratic Philosophers: A Critical History with a Selection of Texts, Cambridge University Press, New York 1962.
Kleene Stephen Cole, Introduction to Mathematics, Van Nostrand, Princeton, NJ 1962.
Klein Arthur H., «Pieter Bruegel the Elder as a Guide to l6th-Century Technology», in Scientfic American, 1978, vol. CCXXXVIII, n 3.
Lami Alessandro, I presocratici. Testimonianze e frammenti da Talete a Empedocle, Rizzoli, Milano 1991.
Landes David S., Storia del tempo: l'orologio e la nascita del mondo moderno, A. Mondadori, Milano 1984.
Lee Henry Desmond Pritchard (a c. di), Zeno of Elea, Adolf Hakkert, Amsterdam 1967.
Lightman Alan P., Time Travel and Papa Joe's Pipe, Charles Scribner's Sons, New York 1984.
Little Heath Thomas (Sir), Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra, Cambridge University Press, Cambridge 1910.
—, A History of Greek Mathematics, Clarendon Press, Oxford 1921.
—, Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus, Dover, New York 1981.
Lorentz Hendrik A., Einstein Albert e Weyl Hermann, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity, Dover, New York 1952.
Lloyd Geoffrey E.R., Early Greek Science: Thales to Aristotle, Norton, New York 1970.
Lucrezio, La natura delle cose, Rizzoli, Milano 1994.
Mach Ernst, L'analisi delle sensazioni e il rapporto fra fisico e psichico, Feltrinelli, Milano 1975.
—, Conoscenza ed errore: abbozzi per una psicologia della ricerca, Einaudi, Torino 1982.
Marchall Clagett, Science of Mechanics in the Middie Ages, University of Wisconsin Press, Madison, WI 1959.
Maria Celeste (Sister), The Private Life of Galileo Compiled Principally from His Correspondence and That of His Eldest Daughter, a c. di Eugenio Albéri e Carlo Arduini, Nichols and Noyes, Boston 1870.
Mason Stephen F., Storia delle scienze della natura, Feltrinelli, Milano 1971.
Matson W.I., «Zeno Moves!», in Essays in Ancient Greek Philosophy, vol. VI: Before Plato, Suny Press, Albany 2001.
Maxwell James Clerk, «A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field», in Philosophical Transactions, 1865, vol. CLXVI, pp. 495-512; rist. in The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, Dover, New York 1952, vol. I.
Mazur Joseph, Euclid in the Rainforest: Discovering Universal Truth in Logic and Math, Pi

Press, New York 2005.
McLaughlin W.I., «Resolving Zeno's Paradoxes», in Scientific American, novembre 1994, pp. 84-89.
Michelson Dorothy Livingston, The Master of Light: A Biography of Albert A. Michelson, Charles Scribner's Sons, New York 1973.
Milton John, The Portable Milton, a c. di Douglas Bush, Viking, New York 1961.
Munro Dana C., «The Speech of Pope Urban II at Clermont, 1095», in American Historical Review, 1906, vol. XI, pp. 231-240.
Murray Gilbert, Five Stages of Greek Religion, Doubleday Anchor, Garden City, NY 1955.
—, Le origini dell'epica greca, Sansoni, Firenze 1964.
Murray Oswyn, Grecia delle origini, il Mulino, Bologna 1983.
Nagel Ernest, La struttura della scienza: Problemi di logica della spiegazione scientifica, Feltrinelli, Milano 1984.
Neugebauer Otto, Le scienze esatte nell'antichità, Feltrinelli, Milano 1974.
Newman James R. (a c. di), The World of Mathematics, Simon & Schuster, New York 1956, vol II.
Norsen Travis, «Einstein's Boxes», in American Journal of Physics, 2005, vol. LXXIII, n. 2.
Oerter Robert, La teoria del quasi tutto: il Modello Standard, il trionfo non celebrato della fisica moderna, Le Scienze, Roma 2007.
Overbye Dennis, «Quantum Trickery: Testing Einstein's Strangest Theory», in New York Times, 27 dicembre 2005.
Palmer Robert Roswell, Storia del mondo moderno, Editori Riuniti, Roma 1985.
Platone, Tutte le opere, a c. di Giovanni Pugliese Carratelli, Sansoni 1993.
Plutarco, Vite parallele, Utet, Torino 2006.
Poincaré Henri, Il valore della scienza, La nuova Italia, Firenze 1994.
—, Scienza e metodo, Einaudi, Torino 1997.
—, La scienza e l'ipotesi, Bompiani, Milano 2003.
Proclo, Commento al I libro degli «Elementi» di Euclide, a c. di Maria Timpanaro Cardini, Giardini, Pisa 1978.
Randel Don Michael (a c. di), The Harvard Dictionary of Music, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MS 2003.
Rawlings A.L., The Science of Clocks and Watches, a c. di Timothy e Amyra Treffry, The British Horological Institute, Upton 1994.
Reynolds Leighton Durham e Wilson Nigel G., Copisti e filologi: la tradizione dei classici dall'antichità ai tempi moderni, Antenore, Padova 1987.
Ronan Colin, Galileo, G.P. Putnam's Sons, New York 1974.
Rucker Rudy, La mente e l'infinito: scienza e filosofia dell'infinito, F. Muzzio, Padova 1991.
Russell Bertrand, Scientific Method in Philosophy, Open Court, London 1914.
—, La conoscenza del mondo esterno, Longanesi, Milano 1980.
—, Introduzione alla filosofia matematica, Longanesi, Milano 2004.
Sacks, Oliver, «The Mind's Eye, What the Blind See», in The New Yorker, 28 luglio 2003.
—, «Speed: Aberrations of Time and Movement», in The New Yorker, 23 agosto 2004.
Salmon Wesley C., Zeno's Paradoxes, Hackett, Indianapolis, IN 2001.

Samuel Herbert L., Essay in Physics, Harcourt Brace & Company, New York 1952.
Sanders John Howard, Velocity of Light, Pergamon Press, Oxford 1965.
Sanderson Edgar, Lamberton J.P. e McGovern John, Six Thousand Years of History, vol. IV: Great Philosophers, E.R. DuMont, Philadelphia 1900.
Santillana Giorgio de, Processo a Galileo: studio storico-critico, Mondadori, Milano 1960.
Scott Kilvert Ian (a c. di), Plutarch, The Rise and Fall of Athens: Nine Greek Lives, Penguin, Maryland 1960.
Shea William R. e Aritgas Mariano, Galileo in Rome: The Rise and FaIl of a Troublesome Genius, Oxford University Press, New York 2003.
Smith D.E., History of Mathematics, Dover, New York 1958.
Standage Tom, Una storia del mondo in sei bicchieri, Codice, Torino 2005.
Swenson Loyd S. Jr., The Ethereal Aether: A History of the Michelson-Morley Aether-Drift Experiments, 1880-1930, Dissertazione di laurea, The Claremont Graduate School, Claremont, CA 1962.
Tannery P., «Le concept scientifique du continu: Zénon d'Elée et Georg Cantor», in Revue Philosophique de la France et de l'Etranger, 1885, vol. XX, n. 2, p. 385.
Thomas Ivor (a c. di), Selections Illustrating the History of Greek Mathematics in Two Volumes, vol. I, From Thales to Euclid, Harvard University Press, Cambridge, MS 1957.
Thompson Benjamin (conte Rumford), Philosophical Transactions, 1798, vol. LXXXVIII.
Thomson George, Studies in Ancient Greek Society, The Citadel Press, New York 1965.
Tolstoj Lev, Guerra e pace, Garzanti, Milano 2007.
Tommaso d'Aquino (san), Commento alla Fisica di Aristotele, Esd – Edizioni Studio Domenicano, Bologna 2004.
Tucidide, La guerra del Peloponneso, Mondadori, Milano 2007.
Untermeyer Louis (a c. di), This singing world: an anthology of modern poetry for young people, Harcourt Brace & Company, New York 1923.
Vitruvio Pollione Marco, De architectura, Studio Tesi, Pordenone 2008.
Vlastos G., «Zeno of Elea», in The Encyclopedia of Philosophy, a c. di E. Edwards, The Macmillan Co. and The Free Press, New York 1967.
Wells Herbert G., Breve storia del mondo, Sansoni, Firenze 1958.
—, La macchina del tempo, Mursia, Milano 2007.
Weyl Hermann, La simmetria, Feltrinelli, Milano 1981.
White Dickson Andrew, Storia delle lotte della scienza con la teologia della cristianità, Utet, Torino 1902.
Whitehead Alfred North, Il processo e la realtà: saggio di cosmologia, Bompiani, Milano 1965.
—, Introduzione alla matematica, Newton Compton, Roma 1976.
Whiteside W.T. (a c. di), The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, Cambridge 1976.
Wigner Eugene, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», in Communication in Pure and Applied Mathematics, 1960, vol. XIII, n. 1.
Wilson Curtis, «Kepler and the Mode of Vision», in The St. Johns Review, 1980, vol. XXXII, n. 1.

Young Thomas, «Experimental Demonstration of the General Law of the Interference of Light», in Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1804, vol. XCIV.